Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Γ΄

Δράμα 26 Μαρτίου 2023

<u>Θέμα Α</u>

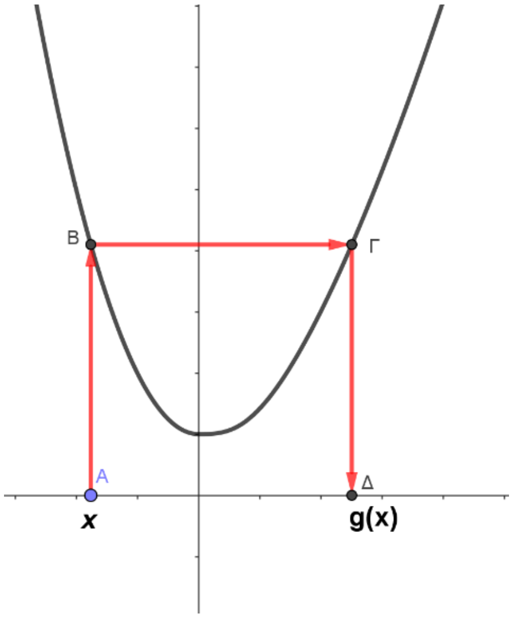
Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & αν\ x\le 0 \\ f_2(x) & αν\ x>0\end{cases}$ όπου $f_1(x)=x^2+1$ και $f_2(x)=\sqrt{x^3+1}$.

Α1. Δικαιολογήστε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty.0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο 0.

Α2. Αν η γραφική παράσταση της f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $g: R\longrightarrow R$ με $g(0)=0$ και τον αριθμό $x\neq 0$ τον αντιστοιχεί στον αριθμό $g(x)$ με τον τρόπο που δείχνει η διπλανή εικόνα:

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.

ii. Να αποδείξετε ότι η g δεν παραγωγίζεται στο 0.



<u>Θέμα Β</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ με $f(1)=0$ για την οποία ισχύει

$$-2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{x^2}\le 3f'(x)\le 2f(2)+\frac{3}{x^2}$$

Β1. Αν

$$g(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$$

να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ με $x_1<x_2$ και

$$g'(x_1)\le 3g'(x)\le 2g'(x_2)$$

Β2. Να δείξετε ότι $f(x)=x-\frac{1}{x}$

Β3. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$

Β4. Να βρεθεί το ελάχιστο μήκος των οριζόντιων χορδών της $f(x)$

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Α)

Α1. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2+1\,, & x\le 0\\ \sqrt{x^3+1}, & x>0\end{cases}$ και $f'(x)=\begin{cases} 2x\,, & x<0\\ \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}, & x>0\end{cases}$.

Για την παράγωγο στο μηδέν έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x(\sqrt{x^3+1}+1)}=0$ Άρα $f'(0)=0$. Οπότε:

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και f συνεχής στο 0 άρα f είναι γνησίως φθίνουσα
στο $(-\infty,0]$.
$f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο 0 άρα f είναι γνησίως αύξουσα
στο $[0,+\infty)$.

Αν $x<0$, $f''(x)=2>0$

Αν $x>0$, $f''(x)=\dfrac{12x\sqrt{x^3+1}-3x^2\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}}{4(x^3+1)}=\dfrac{12x(x^3+1)-9x^4}{4(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}=\dfrac{3x^4+12x}{4(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}>0$

Άρα: $f''(x)=\begin{cases} 2\,, & x<0\\ \frac{3x^4+12x}{4(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}, & x>0\end{cases}$ Δηλαδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
f' συνεχής στο 0 άρα f' γνησίως αύξουσα στο R, οπότε η f είναι κυρτή στο R.

Α2. **i)** f_1 είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ άρα αντιστρέφεται στο διάστημα αυτό.
f_2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα αντιστρέφεται στο διάστημα αυτό.
Για $x<0, g(x)=f_2^{-1}(f_1(x))$
Για $x>0, g(x)=f_1^{-1}(f_2(x))$
Για $x=0, g(0)=0$. Υπολογίζουμε τώρα τις συναρτήσεις f_1^{-1} και f_2^{-1}.

$$f_1(x)=x^2+1\,, x\le 0$$

Θέτουμε $f_1(x)=y \Leftrightarrow x^2+1=y \Leftrightarrow x^2=y-1 \Leftrightarrow x=-\sqrt{y-1}$ με $y\ge 1$.
Δηλαδή $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$.

$$f_2(x)=\sqrt{x^3+1}, x>0.$$

Θέτουμε $f_2(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}=y \Leftrightarrow x^3+1=y^2 \Leftrightarrow x^3=y^2-1 \Leftrightarrow$
$x=\sqrt[3]{y^2-1}$ με $y>1$. Έτσι $f_2^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2-1}, x>1$.
Θα έχουμε λοιπόν:
Αν $x<0, g(x)=f_2^{-1}(f_1(x))=\sqrt[3]{(x^2+1)^2-1}=\sqrt[3]{x^4+2x^2}$
Αν $x>0, g(x)=f_1^{-1}(f_2(x))=-\sqrt{\sqrt{x^3+1}-1}$

Αν $\chi = 0$, $g(0) = 0$. Άρα ο τύπος της g είναι:

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4+2x^2}, & x \le 0 \\ -\sqrt{\sqrt{x^3+1}-1}, & x > 0 \end{cases}$$

ii) Για την παράγωγο στο μηδέν έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^{\frac{2}{3}}}{x}\cdot\sqrt[3]{x^2+2} =$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}\cdot\sqrt[3]{x^2+2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt{\sqrt{x^3+1}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{\frac{x^3}{x^2(\sqrt{x^3+1}+1)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{\frac{x}{(\sqrt{x^3+1}+1)}}\right) = 0.$$

Άρα η g δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Β)

Β1. Από ΘΜΤ για την $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$ έχουμε

$$g'(x_1) = \frac{g(1) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(f(1) - 1 + 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 2\right) = 2\left(-f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\right)$$

$$= -2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$

Από ΘΜΤ για την $g(x) = f(x) - x + \frac{1}{x}$ στο διάστημα $(1,2)$ έχουμε

$$g'(x_2) = \frac{g(2)-g(1)}{2-1} = f(2) - 2 + \frac{1}{2} - f(1) + 1 - 1 = f(2) - \frac{3}{2}$$

Άρα από

$$g'(x_1) + 3 + \frac{3}{x^2} \le 3f'(x) \le 2g'(x_2) + 3 + \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x_1) \le 3f'(x) - 3 - \frac{3}{x^2} \le 2g'(x_2) \Leftrightarrow$$

$$g'(x_1) \le 3g'(x) \le 2g'(x_2)$$

Β2. Στην παραπάνω σχέση θέτουμε όπου $x = x_1$ και έχουμε ότι

$$g'(x_1) \le 3g'(x_1) \Leftrightarrow g'(x_1) \ge 0$$

Ομοίως θέτουμε όπου $x = x_2$ και έχουμε ότι

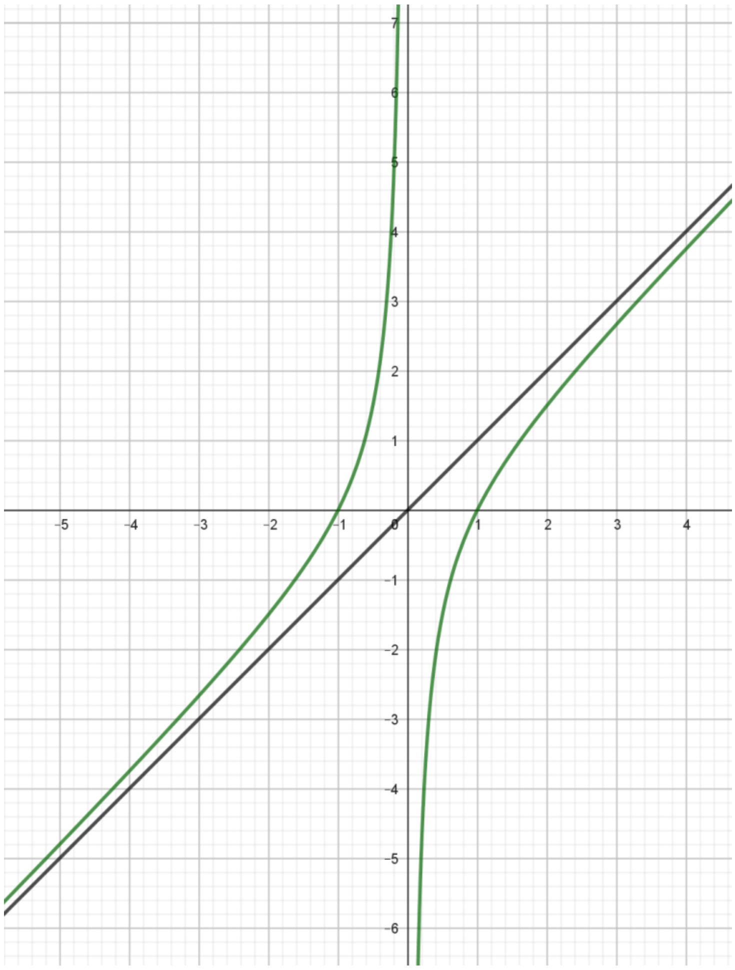
$$3g'(x_2) \le 2g'(x_2) \Leftrightarrow g'(x_2) \le 0$$

Άρα

$$0 \le g'(x_1) \le 3g'(x) \le 2g'(x_2) \le 0$$

Άρα $g'(x) = 0$ οποτε $g(x) = c$. Αν θέσουμε x=1 έχουμε $f(1) - 1 + 1 = c$ άρα c=0 οπότε $f(x) = x - \frac{1}{x}$

Β3. Έχουμε ΠΟ $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ οπότε είναι αύξουσα στο ΠΟ και $f''(x) = -2\frac{x}{x^4}$ άρα είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοιλη στο $(0, +\infty)$.
Ασύμπτωτες έχουμε τον yy' γιατί $\lim_{x\to 0^+} x - \frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} x - \frac{1}{x} = +\infty$.Για πλαγια ασυπτωτη εχουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x} - x = 0$ ομοίως $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ και $\lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{x} - x = 0$ αρα είναι η $y = x$
Ρίζες της $f(x)$ είναι $x - \frac{1}{x} = 0$ αρα x=1 ή x=-1



Β4. Έστω η ευθεία $y = \alpha$ αρα για να βρούμε τα σημεία τομής με την $f(x)$ πρεπει να λυσουμε την εξίσωση $x - \frac{1}{x} = \alpha \Leftrightarrow x^2 - \alpha x - 1 = 0$.Έστω x_1, x_2 οι ριζες της εξίσωσης άρα η χορδή θα έχει μήκος $|x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\alpha^2 + 4} \geq 2$ άρα ελάχιστη απόσταση των χορδών είναι 2.