Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Β΄

Δράμα 26 Μαρτίου 2023

Θέμα Α

Δίνεται πολυώνυμο $\mathbf{P(x)}$ **4ου βαθμού** τέτοιο ώστε

$$\mathbf{P(1) = P(2) = 5}$$

Α1. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P(x)}$ όταν διαιρείται με το $\mathbf{x^2 - 3x + 2}$ έχει υπόλοιπο 5.

Α2. Αν το $\mathbf{P(x) - 5}$ έχει άθροισμα ριζών $\mathbf{10}$, γινόμενο ριζών $\mathbf{24}$ και $\mathbf{P(5) = 29}$

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\mathbf{P(x)}$ παίρνει την μορφή

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 5}$$

ii. Αν ισχύει $\mathbf{P(x) = 5 + \alpha}$ να δειχθεί

$$\boldsymbol{\alpha \geq -1}$$

iii. Αν **κ ακέραιος** να δειχθεί ότι δεν ισχύει

$$\mathbf{P(\kappa) = 22}$$

Θέμα Β

Δίνεται η εξίσωση $(\mathbf{C})$: $4\mathrm{x}^2 + 4y^2 + 24\mathrm{x} - 8\lambda\mathrm{y} + 5\lambda^2 - 11\lambda + 46 = 0$ με $\boldsymbol{\lambda}$ φυσικό αριθμό.

Β1. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού $\boldsymbol{\lambda}$ ώστε η εξίσωση $(\mathbf{C})$ να παριστάνει **8** κύκλους.

Β2. Είναι δυνατόν η αρχή των αξόνων να είναι εσωτερικό σημείο σε κάποιο από τους παραπάνω **8** κύκλους;

Β3. Αν **Α** και **Β** είναι δύο σημεία του κύκλου που προκύπτει με τιμή $\boldsymbol{\lambda = 2}$ και **Γ** και **Δ** δύο σημεία του κύκλου που προκύπτει με τιμή $\boldsymbol{\lambda = 9}$ να αποδείξετε ότι:
$((\mathrm{AB}) - (\Gamma\Delta))^2 + 2(\mathrm{AB}) \cdot (\Gamma\Delta) \leq \mathbf{16}$ **.**

Β4. **i.** Να βρεθεί ποιος από τους παραπάνω **8** κύκλους, έστω **C′**, έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία **(ε):** $2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 0$.
ii. Αν **Μ(−2,1)** είναι σημείο του κύκλου **C′**, να βρείτε την ευθεία **(ζ)** με συντελεστή διεύθυνσης **8,** η οποία τέμνει τον κύκλο **C′** σε σημεία **Σ** και **Λ** έτσι ώστε $\widehat{\Sigma M \Lambda} = 90^{\circ}$.

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Α)

A₁. Έστω ότι

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)\pi(x) + \alpha x + \beta$$

Άρα $P(1) = (1^2 - 3 + 2)\pi(1) + \alpha + \beta \Leftrightarrow$

$$5 = \alpha + \beta$$

Και $P(2) = (2^2 - 3 \cdot 2 + 2)\pi(2) + 2\alpha + \beta \Leftrightarrow 5 = 2\alpha + \beta$

Άρα έχουμε ένα σύστημα

$$\begin{Bmatrix} \alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 5 - \alpha \\ 2\alpha + 5 - \alpha = 5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 5 - \alpha \\ \alpha = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \beta = 5 \\ \alpha = 0 \end{Bmatrix}$$

A₂ i) Από την

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)\pi(x) + 5$$

έχουμε ότι $P(x) - 5 = (x^2 - 3x + 2)\pi(x)$.Ομως μας λεει ότι P(x) είναι 4ου βαθμού άρα το π(x) είναι δευτέρου και έχει άθροισμα ρίζων 10 όμως εμείς έχουμε ήδη ρίζες τις 1,2 άρα οι υπόλοιπες θα έχουν άθροισμα 7 ομοίως αφού έχουν γινόμενο 24 άρα οι υπόλοιπες θα έχουν γινόμενο 12. Άρα αφού ξέρουμε το άθροισμα και το γινόμενο ριζών βρίσκουμε ότι

$$\pi(x) = x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$

Άρα

$$P(x) - 5 = \kappa(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \Leftrightarrow$$
$$P(x) = \kappa(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 5$$

Από $P(5) = 29$ έχουμε κ=1

A₂ ii)

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 5 \Leftrightarrow$$
$$5 + \alpha = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 5 \Leftrightarrow$$
$$\alpha = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$
$$\alpha = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \Leftrightarrow$$
$$\alpha = [(x - 1)(x - 4)][(x - 2)(x - 3)] \Leftrightarrow$$
$$\alpha = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$$

Θέτω $\omega = x^2 - 5x + 4$ άρα

$$\alpha = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$$
$$\alpha = \omega(\omega + 2) \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - \alpha = 0$$

Για να ισχύει αυτό πρέπει $\Delta \geq 0$ άρα

$$4 - 4(-\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \geq -4 \Leftrightarrow \alpha \geq -1$$

A₂ iii) Έχουμε ότι

$$P(\kappa) = 22 \Leftrightarrow (\kappa - 1)(\kappa - 2)(\kappa - 3)(\kappa - 4) + 5 = 22 \Leftrightarrow$$
$$(\kappa - 1)(\kappa - 2)(\kappa - 3)(\kappa - 4) = 17$$

Αφού κ ακέραιος άρα όλοι οι όροι κ-1,κ-2,κ-3,κ-4 είναι ακέραιοι. Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

17 =1·1·1·17 ή $17 = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 17$ ή $17 = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 17$ κτλ. άρα για να συμβεί αυτό θα πρέπει δυο όροι από τους κ-1,κ-2,κ-3,κ-4 πρέπει να είναι ίσοι με 1 ή -1.Αυτο όμως για να συμβεί θα πρέπει να έχουμε δυο διαφορετικές τιμές του κ που είναι άτοπο. Άρα δεν μπορεί να ισχύει η σχέση.

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Β)

Β₁. Η (C): $4x^2 + 4y^2 + 24x - 8\lambda y + 5\lambda^2 - 11\lambda + 46 = 0$ γίνεται:

$x^2 + y^2 + 6x - 2\lambda y + \frac{5\lambda^2 - 11\lambda + 46}{4} = 0$.

Έχουμε $A = 6$, $B = -2\lambda$, $\Gamma = \frac{5\lambda^2 - 11\lambda + 46}{4}$

Για να παριστάνει κύκλο η (C) πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow$

$36 + 4\lambda^2 - (5\lambda^2 - 11\lambda + 46) > 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 11\lambda - 10 > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 10)$

και επειδή λ είναι φυσικός αριθμός οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει είναι $\lambda = 2, 3, 4, \ldots 9$, συνολικά 8 τιμές για το λ άρα 8 κύκλοι με

κέντρο $\mathbf{K}(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho} = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ ή

κέντρο $\mathbf{K}(-3, \lambda)$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho} = \frac{\sqrt{-\lambda^2+11\lambda-10}}{2}$

Β₂. Για είναι το σημείο $O(0,0)$ εσωτερικό σε κάποιο από τους παραπάνω κύκλους θα πρέπει $\mathbf{(KO) < \rho} \Leftrightarrow \sqrt{9+\lambda^2} < \frac{\sqrt{-\lambda^2+11\lambda-10}}{2} \Leftrightarrow 4(9+\lambda^2) < -\lambda^2 + 11\lambda - 10$

$\Leftrightarrow 5\lambda^2 - 11\lambda + 46 < 0$. $\Delta = 121 - 4 \cdot 5 \cdot 46 = -799 < 0$.

Άρα είναι $5\lambda^2 - 11\lambda + 46 > 0$ για κάθε λ. Δηλαδή η αρχή των αξόνων δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο σε κάποιο από τους παραπάνω **8** κύκλους.

Β₃. Για την τιμή $\lambda = 2$ έχουμε τον κύκλο **(c_1)** με κέντρο $K_1(-3,2)$ και ακτίνα

$\rho_1 = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$

Για την τιμή $\lambda = 9$ έχουμε τον κύκλο **(c_2)** με κέντρο $K_2(-3,9)$ και ακτίνα

$\rho_2 = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} = \rho_1$

Έχουμε $((AB) - (\Gamma\Delta))^2 + 2(AB) \cdot (\Gamma\Delta) = (AB)^2 + (\Gamma\Delta)^2$

Αλλά για τα σημεία Α, Β του **(c_1)** ισχύει $(AB) \leq 2\rho_1 = 2\sqrt{2}$, άρα $(AB)^2 \leq 8$ και

για τα σημεία Γ, Δ του **(c_2)** ισχύει $(\Gamma\Delta) \leq 2\rho_2 = 2\sqrt{2}$, άρα $(\Gamma\Delta)^2 \leq 8$

και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $((AB) - (\Gamma\Delta))^2 + 2(AB) \cdot (\Gamma\Delta) \leq \mathbf{16}$

Β₄. **i.** Το κέντρο $K(-3, \lambda)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία **(ε):** $2x + 3y = 0$, άρα $2(-3) + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Επομένως ο κύκλος **C′** ταυτίζεται με τον **(c_1)** με κέντρο $K_1(-3,2)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$.

ii. Η ευθεία **(ζ)** με συντελεστή διεύθυνσης **8** είναι: **(ζ):** $y = 8x + \beta$.

Επειδή $\widehat{\Sigma M \Lambda} = 90^o$ η ΣΛ είναι διάμετρος του κύκλου **(c_1)**.

Άρα το κέντρο $K_1(-3,2)$ ανήκει στην ευθεία **(ζ)**. Επομένως θα έχουμε

$2 = 8(-3) + \beta \Leftrightarrow \beta = 26$. Τελικά η ζητούμενη ευθεία **(ζ)** είναι $y = 8x + 26$.