Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Α΄

Δράμα 26 Μαρτίου 2023

<u>Θέμα Α</u>

Δίνεται ότι $\alpha\beta + 2\gamma = 5\gamma^2 + 1$ και $\alpha + \beta - 4\gamma = 0$ με $\alpha, \beta \in R$

Α1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 5\gamma^2 + 1 = 2\gamma(2x + 1)$ έχει ρίζες τους αριθμούς α,β.

Α2. Να δειχθεί ότι $\alpha = \beta = 2$ και $\gamma = 1$.

Α3. Να λυθεί η εξίσωση $|x + \alpha| + |x + \beta| + |x + \gamma| = 5x - |x|$.

Α4. Αν η εξίσωση $(x - \alpha)(x - \gamma) = 2023$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές τότε να βρεθεί η πιο μεγάλη ρίζα της εξίσωσης $(x - x_1)(x - x_2) = -2023$.

<u>Θέμα Β</u>

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}$-$\hat{\Gamma}$=90^0. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Β1. Να αποδειχτεί ότι $\hat{A}$=$\hat{\Gamma}$=30^0 και $\hat{B}$=120^0.

Β2. Αν η μεσοκάθετος του ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Κ να δειχτεί ότι ΑΒ ⊥ΒΚ.

Β3. Να αποδειχτεί ότι η ΑΒ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{EA\Gamma}$.

Β4. Αν φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΓ να αποδειχτεί ότι οι ΒΖ, ΒΚ σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο με την διχοτόμο ΑΔ.

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Α)

Α₁. $x^2+5\gamma^2+1=2\gamma(2x+1) \Leftrightarrow x^2-4\gamma x+5\gamma^2-2\gamma+1=0 \Leftrightarrow$

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$$\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\cdots=(\alpha-\beta)^2$$

Άρα $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta\pm(\alpha-\beta)}{2}=\begin{cases}\frac{2\alpha}{2}=\alpha\\ \frac{2\beta}{2}=\beta\end{cases}$

Α₂. Αφού έχει 2 λύσεις άρα θα πρέπει $\Delta\geq 0$ άρα έχουμε

$(4\gamma)^2-4(5\gamma^2-2\gamma+1)\geq 0 \Leftrightarrow 16\gamma^2-20\gamma^2+8\gamma-4\geq 0 \Leftrightarrow$

$-4\gamma^2+8\gamma-4\geq 0 \Leftrightarrow \gamma^2-2\gamma+1\leq 0 \Leftrightarrow (\gamma-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow \gamma=1$

Άρα η εξίσωση $x^2-4\gamma x+5\gamma^2-2\gamma+1=0$ γίνεται $x^2-4x+4=0$ και

έχει μια διπλή ρίζα το 2 άρα α=β=2

Α₃. $|x+\alpha|+|x+\beta|+|x+\gamma|=5x-|x| \Leftrightarrow$
$|x+2|+|x+2|+|x+1|=5x-|x| \Leftrightarrow$
$2|x+2|+|x|+|x+1|=5x \Leftrightarrow x>0$

Άρα x+2>0, x+1>0

$$2(x+2)+x+x+1=5x \Leftrightarrow 2x+4+x+x+1=5x \Leftrightarrow x=5$$

που είναι δεκτή.

Α₄. Αφού η εξίσωση $(x-2)(x-1)=2023$ έχει ρίζες x_1, x_2 άρα ισχύει

$$(x-2)(x-1)-2023=(x-x_1)(x-x_2).$$

Αν x=1 έχουμε

$-2023=(1-x_1)(1-x_2)$ άρα το 1 είναι ρίζα της

$(x-x_1)(x-x_2)=-2023.$

Αν x=2 έχουμε

$-2023=(2-x_1)(2-x_2)$ άρα το 2 είναι ρίζα της

$(x-x_1)(x-x_2)=-2023.$

Και επειδή η εξίσωση της

$(x-x_1)(x-x_2)=-2023.$

Είναι δευτεροβάθμια άρα το x=1,2 είναι οι μοναδικές ρίζες άρα η πιο

μεγάλη είναι το 2.

Ενδεικτικές λύσεις (ΘΕΜΑ Β)

Β1. Είναι $\hat{A}$+$\hat{B}$+$\hat{\Gamma}$=180^0. Όμως πρέπει $\hat{A}=\hat{\Gamma}$. Άρα $2\hat{\Gamma}+\hat{B}$=180^0 (1). Αφού ισχύει και $\hat{B}-\hat{\Gamma}$=90^0 (2) προκύπτει 3$\hat{\Gamma}$=90^0 δηλαδή $\hat{\Gamma}$=30^0 και $\hat{B}$=120^0 και $\hat{A}$=30^0.

Β2. Έχουμε ΚΒ=ΚΓ κι έτσι $\widehat{K B \Gamma}=\hat{\Gamma}$=30^0. Άρα $\widehat{ABK}$ =120^0-30^0=90^0.

Β3. $\widehat{AE\Delta}$=90^0, $\widehat{E\Delta A}$=$\hat{\Gamma}$+$\frac{\hat{A}}{2}$=30^0+15^0=45^0 (εξωτερική του τριγώνου ΑΔΓ). Έτσι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, δηλαδή $\widehat{EA\Delta}$=45^0. Όμως $\widehat{BA\Delta}$=15^0 συνεπώς $\widehat{EAB}$=45^0-15^0=30^0=$\widehat{BA\Gamma}$.

Β4. Αν Λ,Ν είναι τα σημεία τομής των ΒΖ, ΒΚ με την ΑΔ τότε $\widehat{NB\Lambda}=\widehat{A\Lambda Z}$=90^0-15^0=75^0. Επίσης $\widehat{BN\Lambda}$=$\widehat{NB\Delta}+\widehat{B\Delta A}$=30^0+45^0=75^0. Άρα το τρίγωνο ΒΛΝ είναι ισοσκελές.