Μαθηματικά
Τάξη Α
15-3-1998

Ζήτημα 1ο

Ένας μαθητής αναχωρεί από το σπίτι του στη 7:30΄ π.μ. για το σχολείο του. Όταν βαδίζει 15 μέτρα ανά 20'' φθάνει στο σχολείο με καθυστέρηση 2 min, ενώ όταν βαδίζει 30 μέτρα ανά 35'' φθάνει στο σχολείο 2 min νωρίτερα. Να βρείτε:

i) την απόσταση του σχολείου από το σπίτι του μαθητή.

ii) την ώρα που πρέπει να φθάνει κάθε εργάσιμη ημέρα στο σχολείο.

Ζήτημα 2ο

Τα μέτρα των γωνιών Α, Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογα των αριθμών 1, 3, 2 αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΜΒ έχουν ίσες τις γωνίες τους μία προς μία.

Η επιτροπή

Μαθηματικά
Τάξη Β
15-3-1998

Ζήτημα 1ο

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ=β και ΒΓ=α (β>α). Από το σημείο Γ φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΓΕ και ΓΖ του κύκλου (Δ,α) οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν την ΑΒ στο Κ και την προέκταση της ΑΒ στο Λ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι $ΓΚ=ΓΛ=β$ και $ΑΚ \cdot ΑΛ=α^2$

β) Να υπολογισθεί η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΓΚΛ.

γ) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα α και β, όταν το τρίγωνο ΓΚΛ είναι ισόπλευρο.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $(α>β>γ)$ με διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και έστω $Α\hat{Δ}Β=\hat{ω}$, $Β\hat{Ε}Γ=\hat{φ}$, $Γ\hat{Ζ}Α=\hat{θ}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Ε=\frac{1}{4}(β^2-γ^2)εφω$, όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου.

β) $σφ^3ω+σφ^3φ+σφ^3θ=3σφω \cdot σφφ \cdot σφθ$

Η επιτροπή

Τάξη Γ
Μαθηματικά
15-3-1998

Ζήτημα 1ο

Έστω συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,1998]$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $K>0$ ώστε για κάθε $x\in[0,1998]$ να ισχύει $|f''(x)|\le K$.

β) Αν $f(0)=f(1998)$, δείξτε ότι $|f'(0)+f'(1998)|\le 1998K$.

Ζήτημα 2ο

Δίνεται $\nu\times\nu$ πίνακας A τέτοιος ώστε $A^2+4I=0$.

α) Να δείξετε ότι: i) ν άρτιος και $|A|=2^{\nu}$.

ii) για κάθε $\nu\times\nu$ πίνακα Γ ισχύει $|\Gamma(2I-A)+A^2|=|(2I-A)\Gamma-4I|$.

β) Αν $\nu=2$ και η εξίσωση $|xBA-2xA|-2^{\nu}x-1=0$, $x\in\mathbb{R}$, δεν έχει πραγματικές ρίζες να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$|(x-3)\,\mathrm{adj}A+x\,\mathrm{adj}(B-2I)|=0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

Η επιτροπή

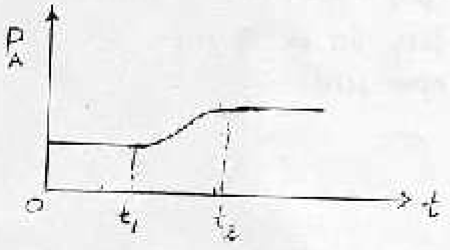
[signatures]

Α τάξη ΦΥΣΙΚΗ

α) Δεδομένου ότι κατά την αλληλεπίδραση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, να αποδείξετε τον τρίτο νόμο του Newton.

β) Στο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα της ορμής ενός σώματος Α, το οποίο αλληλεπιδρά με ένα άλλο σώμα Β.

Να γίνουν ποιοτικά διαγράμματα των δυνάμεων που δέχονται τα σώματα Α και Β.



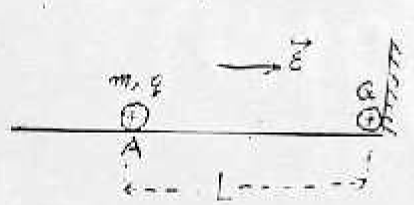
τάξη Β΄ ΦΥΣΙΚΗ

Ακλόνητη σφαίρα με φορτίο $Q = 1\,\mu Cb$ βρίσκεται πάνω σε μονωτικό λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα δεύτερο ίσου μεγέθους φορτισμένο σφαιρίδιο με φορτίο $q = 1\,mCb$ και μάζα $m = 1\,Kgr$, αφήνεται αρχικά ελεύθερο σ' ένα σημείο Α του οριζοντίου επιπέδου, το οποίο απέχει από την σφαίρα με φορτίο Q κατά $L = 0{,}5\,m$. Το σύστημα βρίσκεται σε εξωτερικό ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης $E = 2{,}25 \cdot 10^5\,N/Cb$, με φορά από το κινητό σφαιρίδιο προς την ακίνητη σφαίρα.

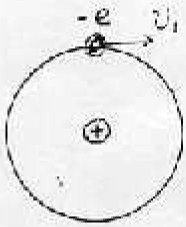
Να βρεθούν: α) Σε πόση απόσταση από την ακίνητη σφαίρα, το σφαιρίδιο θα έχει αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα και πόση είναι η ταχύτητα αυτή,

β) Ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη απομάκρυνση του σφαιριδίου από την ακίνητη σφαίρα στην οποία φθάνει το σφαιρίδιο.

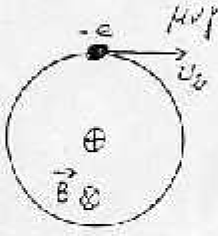
Δίνεται $K = 9 \cdot 10^9\,N \cdot m^2/Cb^2$



Γ' τάξη. ΦΥΣΙΚΗ



Σύμφωνα με το μοντέλο του Bohr, στο άτομο του υδρογόνου, το ηλεκτρόνιο θεωρείται ότι κινείται ομαλά κυκλικά γύρω από το πρωτόνιο με συχνότητα ν_1.



Αν ξαφνικά δημιουργήσουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, με την μαγνητική του επαγωγή $\vec{B}$ κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά αυτή που φαίνεται στο σχήμα, παρατηρούμε ότι αλλάζει η συχνότητα περιστροφής σε ν_2, ενώ το ηλεκτρόνιο συνεχίζει να κινείται ομαλά κυκλικά με την ίδια ακτίνα.

Να βρεθούν: α) Ποιά είναι η νέα συχνότητα περιστροφής ν_2; Είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την ν_1;

β) Πως εξηγείται το γεγονός, ότι το ηλεκτρόνιο συνεχίζει να κινείται ομαλά κυκλικά με την ίδια ακτίνα; Πως άλλαξε το μέτρο της ταχύτητας σε ν_2, αφού οι δυνάμεις Coulomb και Lorentz είναι συνέχεια κάθετες στην τροχιά;

Δίνονται η μάζα m και το φορτίο e του ηλεκτρονίου, η $\vec{B}$ και η ν_1.

Α΄ ΤΑΞΗ ([illegible])

Έστω S η απόσταση και t ο χρόνος

(1)

$20''$ $15m$

$60''$ $v = \frac{15 \cdot 60}{20} = 45\, m/min = v$

$35''$ $32m$

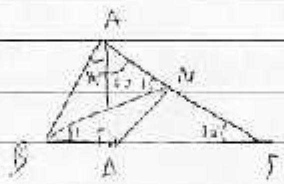
$60''$ $v_1 = \frac{32 \cdot 60}{35} = \frac{384}{7}\, m/min$

$S = v_1(t-2)$
$S = v_2(t-1)$

$v_1(t+2) = \frac{384}{7}(t-1) \Leftrightarrow$

$7t + 14 = 8t - 8 \Leftrightarrow t = 22\, min$

(2)



$\frac{A}{7} = \frac{B}{3} = \frac{\Gamma}{2} = \frac{A+B+\Gamma}{7+3+2} = \frac{180}{12} = 15$

$A = 105$

$B = 45$

$\Gamma = 30$

$B\Delta = \Delta B = AM = M\Delta \Leftrightarrow$

$\hat{BM\Delta}$ (ισοσκελές)

$\hat{M\Delta\Gamma} = 2\hat{B}_1 \Leftrightarrow 30 = 2\hat{B}_1 \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 30 = \hat{\Gamma}$

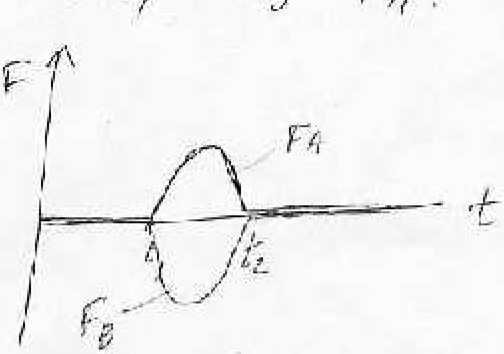
$\hat{M}_1 = 45 = \hat{B}$

$\hat{A} = 105$

Τάξη Α'

β) Η δύναμη F_A που δέχεται το A από το B, σε κάθε χρονική στιγμή ισούται με την κλίση της καμπύλης $P_A - t$

Η δύναμη F_B που δέχεται το B από το A είναι πάντοτε αντίθετη της F_A.



γ) 1

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \Rightarrow \vec{P}_1' - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 - \vec{P}_2'$$

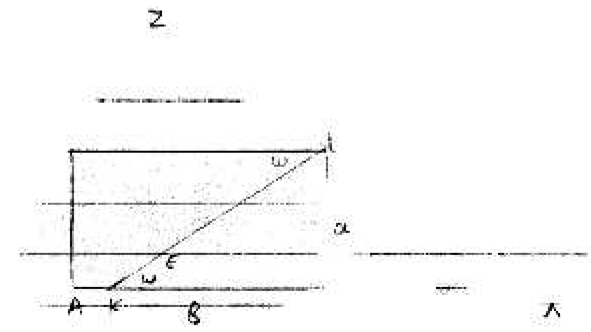
$$\Rightarrow \Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \Rightarrow \vec{F}_{2,1}\Delta t = -\vec{F}_{1,2}\Delta t$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

Τάξη Β

Λύσεις θεμάτων

(1)



α) Γεν ισοσκελές

ΚΒΓ ΓΖΔ (ορθογώνια ω̂, ΒΓ=ΔΖ=α) άρα ΚΓ Δ

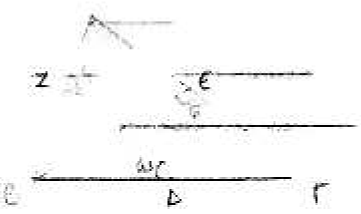
ΑΚ.ΑΛ (β-ΚΒ)(β- (β+ΚΒ)(β+ΒΚ) $\beta^2-KB^2 = K\Gamma^2-KB^2 = B\Gamma^2$

β) $R = \frac{\Gamma K \cdot \Gamma \Lambda \cdot K\Lambda}{4E} = \frac{\beta \cdot \beta \cdot K\Lambda}{4 \cdot \frac{1}{2} K\Lambda \cdot B\Gamma}$ $\frac{\beta}{2\alpha}$

γ) ΚΛ. ΚΓ ⟺ 2ΚΒ β KB^2 β ⟺)-β ⟺ $3\beta^2=4$ ^{2} άρα $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

(2)

εφω $\frac{v_\alpha}{K\Delta}$



β' θ. διαμέσων: $\beta^2-\gamma^2 = 2\alpha \cdot K\Delta$

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{2\alpha \cdot v_\alpha}{\beta^2-\gamma^2} = \frac{4E}{\beta^2-\gamma^2}$ ⟺

$E = \frac{1}{4}(\beta^2-\gamma^2)$ εφ

$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{4E}$

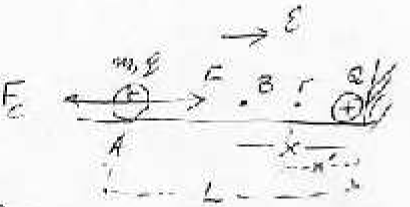
όμοια: $\sigma\varphi\varphi = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi} = \frac{\gamma^2-\alpha^2}{4E}$

$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{4E}$

σφω+σφφ+σφθ 0 ⟺

σφω+σφφ+σφθ 3 σφω σφφ σφθ

Τάξη Β



Το μέτρο της αρχικής δύναμης του η.π. πάνω στο σφαιρίδιο είναι: $F = Eq \rightarrow F = 225\ N$

Το μέτρο της αρχικής δύναμης Coulomb πάνω στο σφαιρίδιο είναι $F_c = K\frac{Qq}{L^2} \Rightarrow F_c = 36\ N$

Άρα $F > F_c$ και το σφαιρίδιο θα κινηθεί προς τα δεξιά.

Το σφαιρίδιο θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα στη θέση Β, στην οποία η $\Sigma F = 0$, δηλαδή όταν $F = F_c \Rightarrow Eq = K\frac{Qq}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{KQ}{E}} \Rightarrow \boxed{x = 0,2\ m}$

Για να βρούμε την μέγιστη ταχύτητα εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το σφαιρίδιο από την θέση Α μέχρι την Β.

$$Eq(L-x) + q\left(\frac{KQ}{L} - \frac{KQ}{x}\right) = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{max} = 9\ m/sec}$$

β) Για να βρούμε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τις θέσεις Α και Γ, όπου στιγμιαία το σφαιρίδιο σταματά.

$$Eq(L-x') + q\left(\frac{KQ}{L} - \frac{KQ}{x'}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$x'^2 - \left(L + \frac{KQ}{EL}\right)x' + \frac{KQ}{E} = 0 \Rightarrow x'^2 - 0,58x' + 0,04 = 0$$

$\Rightarrow x_1' = 0,5\ m$ και $x_2' = 0,08\ m$. Άρα η μέγιστη απομάκρυνση είναι $\boxed{x_1' = 0,5\ m}$ (θέση Α) και η ελάχιστη $\boxed{x_2' = 0,08\ m \text{ θέση Γ}}$

Γ' τάξη

Λύσεις θεμάτων

1ο α) f'' συνεχής στο $[0,1998]$ (Θ. μέγιστης - ελάχιστης τιμής)

υπάρχουν m, M ώστε για κάθε $x \in [0,1998]$ να ισχύει $m \leq f''(x) \leq M$

φραγμένη - άρα υπάρχει K: $|f''(x)| \leq K$ (1)

β) Θ. Rolle, f στο $[0,1998]$

υπάρχει $\xi \in (0,1998)$: $f'(\xi) = 0$

. Θ.Μ.Τ. για την f' στα διαστήματα $[0,\xi]$ και $[\xi,1998]$

υπάρχουν $\xi_1 \in (0,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,1998)$ ώστε:

$f''(\xi_1) = \dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0} = \dfrac{-f'(0)}{\xi}$ και $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(1998)-f'(\xi)}{1998-\xi} = \dfrac{f'(1998)}{1998-\xi}$

Γνωρίζουμε (1)

$\left|\dfrac{-f'(0)}{\xi}\right| \leq K \Leftrightarrow |f'(0)| \leq K\xi$ και $\left|\dfrac{f'(1998)}{1998-\xi}\right| \leq K \Leftrightarrow |f'(1998)| \leq K(1998-\xi)$

Άρα $|f'(0) - f'(1998)| \leq |f'(0)| + |f'(1998)| \leq K\xi + K(1998-\xi) = K \cdot 1998$

2ο α) $A^2 = -4I$ άρα $|A|^2 = (-4)^\nu \geq 0$ ν = άρτιος

i) $|A|^2 = 4^\nu \Rightarrow |A| = \pm 2^\nu$

• $A^2 + 4A + 4I = 4A \Leftrightarrow (A+2I)^2 = 4A$ άρα $|A+2I|^2 = 4^\nu |A| \geq 0$

οπότε $|A| = 2^\nu$

β) $\nu = 2$ $|A| = 4$

$|x(B-2I)A| - 2|A|x - 1 = 0 \Rightarrow x^2|B-2I| \cdot 4 - 8x - 1 = 0$

δεν έχει ρίζα [illegible] $\Delta < 0 \Leftrightarrow 64 + 16|B-2I| < 0 \Leftrightarrow |B-2I| < -4$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |(x-3)\,adj\,A + x\,adj(B-2I)|$ [illegible]

Θ. Bolzano

• f συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,3]$ (A αντιστρέψιμος)

$f(0) = |-3\,adj\,A| = (-3)^2\,|A \cdot A^{-1}| = 9 \cdot |A|^2 \cdot \dfrac{1}{|A|} = 9 \cdot 4 = 36 > 0$

$f(3) = |3\,adj(B-2I)| = 9\,|B-2I|^2 \cdot \dfrac{1}{|B-2I|} = 9|B-2I| < 9(-4) < -36 < 0$.

ii) $|\Gamma(2I-A) + A^2| = |\Gamma(2I-A) - 4I| = |\Gamma(2I-A) - 4(2I-A)^{-1}(2I-A)| =$

$$|\Gamma - 4(2I-A)^{-1}|\,|2I-A| =$$

$$|2I-A|\,|\Gamma - 4(2I-A)^{-1}| =$$

$$|(2I-A)\cdot\Gamma - 4(2I-A)(2I-A)^{-1}| =$$

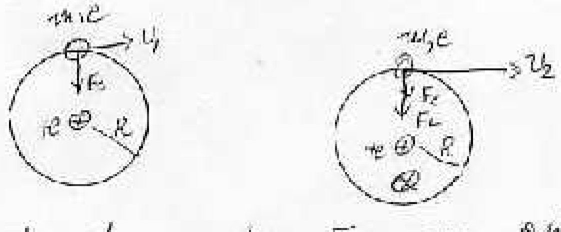
$$|(2I-A)\Gamma - 4I|$$

- $(2I-A)$ αντιστρέφεται και A αντιστρέφεται.

$$(2I-A)(2I+A) = 4I - A^2 = 8I \Leftrightarrow (2I-A)^{-1} = \frac{1}{8}(2I+A).$$

$$A.A = -4I \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}A.$$

Τάξη Γ



α) Αρχικά το ρόλο F_K τον παίζει η δύναμη Coulomb.

είναι $F_C = F_K \Rightarrow F_C = m\frac{υ_1^2}{R}$ (1)

επειδή $υ_1 = 2\pi ν_1 R \overset{(1)}{\Rightarrow} F_C = 4\pi^2 ν_1^2 R m$ (2)

Όταν δημιουργηθεί το Σ.Μ.Π, στο ηλεκτρόνιο εκτός της F_C θα ασκηθεί και F_L, αφού το Μ.Π με φορά προς το κέντρο της τροχιάς. Οι δύο αυτές δυνάμεις θα παίζουν ρόλο κεντρομόλου στο ηλεκτρόνιο. Ισχύει:

$$F_C + F_L = m\frac{υ_2^2}{R} \quad (3)$$

όμως $υ_2 = 2\pi ν_2 R$ οπότε η (3) $\Rightarrow F_C + F_L = 4\pi^2 ν_2^2 R m$ (4)

είναι όμως $F_L = B e υ_2 = Be 2\pi ν_2 R$ (5)

Από (2) και (5) $\rightarrow$ (1) $\Rightarrow 4\pi^2 ν_1^2 R m + 2\pi B e R ν_2 = 4\pi^2 R m ν_2^2$

$$\Rightarrow ν_2^2 - \frac{Be}{2\pi m} ν_2 - ν_1^2 = 0 \Rightarrow ν_2 = \frac{Be}{4\pi m} + \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{Be}{\pi m}\right)^2 + ν_1^2}$$

(η αρνητική τιμή απορρίπτεται). Παρατηρούμε ότι $ν_2 > ν_1$

β) Παρόλο που μεγάλωσε το μέτρο της ταχύτητας ($υ_2 > υ_1$) το ηλεκτρόνιο συνεχίζει να κινείται σε κυκλική τροχιά ίδιας ακτίνας διότι τώρα παίζουν ρόλο κεντρομόλου δύο δυνάμεις ($F_C + F_L$).

Το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου μεγάλωσε, διότι κατά την δημιουργία του Μ.Π. υπήρξε χρονική μεταβολή του με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί και ένα άλλο ηλεκτρικό μη συντηρητικό πεδίο, το οποίο ασκεί ηλεκτρική δύναμη στην κατεύθυνση της ταχύτητας (δηλαδή εφαπτομενικά στην τροχιά). Όταν ολοκληρώθηκε η δημιουργία του Μ.Π και αυτό έμεινε χρονικά σταθερό, σταμάτησε και η ύπαρξη του ηλεκτρικού μη συντηρητικού πεδίου.