Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Β΄

Δράμα 18 Μαρτίου 2018

<u>Θέμα Α</u>

Α1. Να αποδείξετε ότι: $3(\kappa^2+\lambda^2+\mu^2) \geq (\kappa+\lambda+\mu)^2$ κ,λ,μ $\in \mathbb{R}$.

Α2. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha, \beta, \gamma \geq -2$.

Αν η εξίσωση $\sqrt{2x^3+\alpha}+\sqrt{\beta-2x^2}+\sqrt{2x+\gamma}=\sqrt{3x^4+3(\alpha+\beta+\gamma+1)}$ έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών ως προς χ, να λυθεί.

<u>ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

Α1.

$$3\left(\kappa^2+\lambda^2+\mu^2\right) \geq \left(\kappa+\lambda+\mu\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$3\kappa^2+3\lambda^2+3\mu^2 \geq \kappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\kappa\lambda+2\lambda\mu+2\kappa\mu \Leftrightarrow$$

$$2\kappa^2+2\lambda^2+2\mu^2-2\kappa\lambda-2\lambda\mu-2\kappa\mu \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa^2+\lambda^2-2\kappa\lambda)+(\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu)+(\kappa^2+\mu^2-2\kappa\mu) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa-\lambda)^2+(\mu-\lambda)^2+(\kappa-\mu)^2 \geq 0$$

ισχύει

Α2.

$$\sqrt{2x^3+\alpha}+\sqrt{\beta-2x^2}+\sqrt{2x+\gamma}=\sqrt{3x^4+3(\alpha+\beta+\gamma+1)}$$

$\mathrm{A}\nu$ $\kappa=\sqrt{2x^3+\alpha}, \lambda=\sqrt{\beta-2x^2}, \mu=\sqrt{2x+\gamma}$

$\mathrm{A}\rho\alpha$ εχουμε απο την ανισοτητα του Α ερωτηματος

$$3(2x^3+\alpha+\beta-2x^2+2x+\gamma) \geq (\sqrt{2x^3+\alpha}+\sqrt{\beta-2x^2}+\sqrt{2x+\gamma})^2 \Leftrightarrow$$

$$6x^3+3\alpha+3\beta-6x^2+6x+3\gamma \geq 3x^4+3(\alpha+\beta+\gamma+1) \Leftrightarrow$$

$$3x^4-6x^3+6x^2-6x+3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{x}-1)(x^3-x^2+x-1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2(x^2+1) \leq 0$$

$\alpha\rho\alpha$ x=1

<u>Η ισότητα ισχύει αν α=β-4=γ</u>

Θέμα Β

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ που κινούνται στους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οψ αντίστοιχα ώστε το τρίγωνο ΟΑΒ να έχει σταθερή περίμετρο 4036 μονάδες.

Αν $(AB)=\gamma$, να δείξετε ότι:

Β₁. αβ =2018(α+β-γ).

Β₂. Υπάρχει σταθερό σημείο Κ του επιπέδου του τριγώνου του οποίου η απόσταση από την ευθεία ΑΒ να είναι σταθερή. Επίσης να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Κ, καθώς και η σταθερή απόστασή του από την ευθεία ΑΒ.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Β₁. Από υπόθεση, α+β+γ=4036. (1) Επίσης από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ : $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2 \Leftrightarrow$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\gamma^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (4036-\gamma)^2-2\alpha\beta=\gamma^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4036^2-2\cdot 4036\cdot\gamma+\gamma^2-2\alpha\beta=\gamma^2 \Leftrightarrow$$
$$2\alpha\beta=4036^2-2\cdot 4036\cdot\gamma \overset{:2}{\Leftrightarrow} \alpha\beta=2018\cdot 4036-4036\cdot\gamma \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta=2018(4036-2\cdot\gamma) \xLeftrightarrow{\alpha+\beta+\gamma=4036}$$
$$\alpha\beta=2018(\alpha+\beta+\gamma-2\cdot\gamma) \Leftrightarrow \alpha\beta=2018(\alpha+\beta-\gamma). \text{Το ζητούμενο.}$$

Β₂. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ: $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=1 \Leftrightarrow \beta\chi+\alpha\psi-\alpha\beta=0.$

Έστω $K(\chi_0,\psi_0)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου.

Τότε $d(K,(AB))=\frac{|\beta\cdot\chi_0+\alpha\cdot\psi_0-\alpha\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{|\beta\cdot\chi_0+\alpha\cdot\psi_0-2018\cdot\alpha-2018\cdot\beta+2018\cdot\gamma|}{\sqrt{\gamma^2}}=$

$$\frac{|2018\cdot\gamma+\beta\cdot(\chi_0-2018)+\alpha\cdot(\psi_0-2018)|}{|\gamma|}=\left|2018+\frac{\beta}{\gamma}(\chi_0-2018)+\frac{\alpha}{\gamma}(\psi_0-2018)\right|$$

$\textit{Παρατηρούμε ότι αν } K=(2018{,}2018)$ ή $\textit{ισοδύναμα}$:

$$\chi_0=2018 \ \textit{και} \ \psi_0=2018$$
$$d(K,(AB))=2018, \textit{σταθερό για κάθε } \alpha,\beta,\gamma \textit{ που ικανοποιούν την } (1).$$

Τελικά το ζητούμενο σημείο είναι το $K=(2018{,}2018)$ και η ζητούμενη σταθερή απόστασή του από την ευθεία (ΑΒ), 2018 μονάδες.