Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Α΄

Δράμα 18 Μαρτίου 2018

Θέμα Α

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda^2+1)\cdot x + (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 0 \quad \lambda \in R - \{0\}$ (1)

Α₁. Να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές.

Α₂. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης **(1).**

Α₃. Να δείξετε ότι η ανίσωση $\lambda^2 \cdot \mathrm{S} - \mathrm{P} - 16\cdot\lambda^2 < -37$, με S και P το άθροισμα και γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της **(1)** είναι αδύνατη στο R, $\lambda \in R - \{0\}$.

Α₄. Αν λ = 2 και x_1 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης **(1),**
να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = 100\cdot\sqrt{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_1^2}\cdot\sqrt[6]{x_1^8}+13}+418$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Α₁.

$$\Delta = \left[-2(\lambda^2+1)\right]^2 - 4(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 4(\lambda^2+1)^2 - 4\left[(\lambda+1)(\lambda-1)\right]^2 = 4[(\lambda^2+1)^2 - (\lambda^2-1)^2]$$

$$4(\lambda^2+1+\lambda^2-1)(\lambda^2+1-\lambda^2+1) = 4(2\lambda^2)2 = 16\lambda^2 > 0$$ αφού $\lambda \neq 0$.

Α₂.

$$x_{1,2} = \frac{-\left[-2(\lambda^2+1)\right] \pm \sqrt{16\lambda^2}}{2} = \frac{2\lambda^2+2\pm 4\lambda}{2} = \frac{2(\lambda^2+1\pm 2\lambda)}{2} = \left[\begin{array}{l}(\lambda+1)^2 \\ (\lambda-1)^2\end{array}\right.$$

Α₃.

$S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-2(\lambda^2+1)}{1} = 2\lambda^2+2$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{(\lambda^2-1)^2}{1} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$. Άρα

$$\lambda^2\cdot\mathrm{S} - \mathrm{P} - 16\cdot\lambda^2 < -37 \Leftrightarrow \lambda^2(2\lambda^2+2) - (\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1) - 16\lambda^2 + 37 < 0 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 2\lambda^2 - \lambda^4 + 2\lambda^2 - 1 - 16\lambda^2 + 37 < 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda^4 - 12\lambda^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow (\lambda^2-6)^2 < 0$, αδύνατη στο R.

Α₄. Για λ = 2 έχουμε αντίστοιχα ρίζες , $x_1 = 9$ και $x_2 = 1$. Επομένως για $x_1 = 9$ η παράσταση Α γίνεται: $\mathrm{A} = 100\cdot\sqrt{\sqrt{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_1^2}\cdot\sqrt[6]{x_1^8}+13}+418 =$

$$100\cdot\sqrt{\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{9^2}\cdot\sqrt[6]{9^8}+13}+418 = 100.\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{9^2}\cdot\sqrt[3]{9^4}+13}+418 =$$

$$100\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{9^6}+13}+418 = 100.\sqrt{3\cdot 9^2+13}+418 =$$

$$100.\sqrt{243+13}+418 = 100\cdot\sqrt{256}+418 = 100\cdot 16+418 = 1600+418 = 2018$$

Θέμα Β

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ,Ν τα μέσα των πλευρών του ΓΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω Ε σημείο της ΑΔ ώστε $\hat{\text{ΕΓΔ}} = \frac{1}{2}\hat{\text{ΑΒΜ}}$ και Ζ σημείο στην προέκταση της ΓΔ ώστε $\widehat{ΖΕΔ} = \widehat{ΑΒΜ}$. Να δείξετε ότι:

Β1. ΓΝ = ΒΜ

Β2. ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{ΝΓΔ}}$

Β3. ΖΕ είναι κάθετη στην ΓΝ.

Β4. ΖΕ = ΑΕ + ΑΒ

Β5. 2ΒΜ = ΓΖ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Β1. Το ΝΒΓΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διότι έχει $ΒΝ =\parallel ΓΜ$ και $\hat{Β} = 90^\circ$. Άρα και οι διαγώνιές του είναι ίσες. Αλλιώς: Τα τρίγωνα ΒΓΝ και ΒΓΜ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΒΓ κοινή και ΒΝ=ΓΜ ως μισά ίσων τμημάτων). Άρα ΒΜ=ΓΝ.

Β2. Έστω $\widehat{ΑΒΜ} = 2\cdot\varphi$ και άρα από υπόθεση $\widehat{ΕΓΔ} = \varphi$.

Έστω $\widehat{ΜΒΓ} = \omega$. Από $1^ο$ ερώτημα και την ισότητα των τριγώνων ΒΓΝ και ΒΓΜ και $\widehat{ΒΓΝ} = \omega$. Τότε $\widehat{ΑΒΜ} = \widehat{ΝΓΜ} = 2\cdot\varphi$ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. Άρα $\widehat{ΝΓΕ} = \varphi$ και ΓΕ διχοτόμος της $\widehat{ΝΓΔ}$.

Β3. Έστω ότι η προέκταση της ΖΕ τέμνει την ΓΝ στο σημείο Κ και ότι $\widehat{ΜΒΓ} = \omega$. Τότε και $\widehat{ΔΖΕ} = \omega$ ως συμπληρωματική της $\widehat{ΖΕΔ} = 2\cdot\varphi$.

Τελικά στο τρίγωνο ΖΚΓ : $\widehat{ΕΖΔ} + \widehat{ΖΓΚ} = \omega + 2\cdot\varphi = 90^\circ$. Οπότε $\hat{Κ} = 90^\circ$, το ζητούμενο.

Β4. Προεκτείνουμε την ΕΑ κατά ΑΗ=ΑΒ. Άρα ΑΕ+ΑΒ=ΑΕ+ΑΗ=ΕΗ. Αρκεί να δείξουμε ότι ΕΖ=ΕΗ. Τα τρίγωνα ΔΖΕ και ΚΕΗ είναι ίσα. (ορθογώνια, ΕΔ=ΕΚ διότι το Ε σημείο της διχοτόμου της $\widehat{ΝΓΔ}$ και $\widehat{ΖΕΔ} = \widehat{ΚΕΑ}$ ως κατακορυφήν. Άρα ΕΖ=ΕΗ. Το ζητούμενο.

Β5. Το ΑΗΒΓ είναι παραλληλόγραμμο διότι $ΑΗ =\parallel ΒΓ$. Επειδή Ν μέσο της διαγωνίου του ΑΒ, θα είναι και μέσο της ΓΗ. Οπότε ΒΜ=ΓΝ=ΝΗ και άρα $2ΒΜ = ΓΗ$. Τελικά αρκεί να δείξουμε ότι $ΓΗ = ΓΖ$.

<u>1ος τρόπος.</u> Έστω $\widehat{ΓΕΔ} = \widehat{ΓΕΚ} = \theta$. Τα τρίγωνα ΓΕΔ και ΓΕΚ είναι ίσα. Άρα τα τρίγωνα ΓΕΖ και ΓΕΗ είναι ίσα. (ΓΕ κοινή, ΕΖ=ΕΗ και $\widehat{ΓΕΖ} = \widehat{ΓΕΗ} = 2\cdot\varphi + \theta$). Οπότε $ΓΗ = ΓΖ$, το ζητούμενο.

<u>2ος τρόπος.</u> Από $4^ο$ ερώτημα τα τρίγωνα ΔΖΕ και ΚΕΗ είναι ίσα. Άρα $ΚΗ = ΔΖ$. Επίσης $ΓΔ = ΓΚ$ διότι τα τρίγωνα ΓΕΔ και ΓΕΚ είναι ίσα. Άρα $ΓΗ = ΓΖ$ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων.