Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά   Τάξη: Α΄

Δράμα 02 Απριλίου 2017

<u>Θέμα Α</u>

Δίνονται οι εξισώσεις: $\boldsymbol{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0}\quad(\mathbf{1})$

$\boldsymbol{\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0}\quad(\mathbf{2})$ με α,β,γ $\in\mathbb{R}$, α·γ<0

οι οποίες δεν έχουν καμιά κοινή ρίζα.

Α. Να δείξετε ότι: i) η (1) δεν έχει ρίζα τον αριθμό 0.

ii) η (1) δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Β$_1$. Αν μεταξύ των ριζών χ_1 *και* χ_2 της (1) και των συντελεστών α,β,γ ισχύει η σχέση:

$$\boldsymbol{\alpha(\chi_1)^2+\beta\chi_1\chi_2+\gamma(\chi_2)^2=0}\qquad \mathbf{(3)}$$

Να δείξετε ότι: $\chi_1=(\chi_2)^2$

Β$_2$. Αν επιπλέον ισχύει και η σχέση:

$$\boldsymbol{\chi_1\beta^2-(\chi_1+\chi_2)\beta\gamma+\chi_2\gamma^2=0}\ \ \mathbf{(4)}$$

Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1), δηλαδή τους αριθμούς χ_1 *και* χ_2.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Α). i) Αν το 0 είναι ρίζα της (1) γ=0 άτοπο αφού αγ≠0. Άρα το 0 όχι ρίζα της (1)

ii) Αν το 1 ρίζα της (1) τότε α+β+γ=0 και τότε το 1 ρίζα και της (2) άτοπο. Άρα το 1 όχι ρίζα της (1).

Β) Το χ_1 ρίζα της (1) άρα $\alpha(\chi_1)^2+\beta\chi_1+\gamma=0$ (5)

Αφαιρούμε κατά μέλη (3) –(5) και παίρνουμε:

$$\beta\chi_1\chi_2-\beta\chi_1+\gamma(\chi_2)^2-\gamma=0\Leftrightarrow\beta\chi_1(\chi_2-1)+\gamma(\chi_2+1)(\chi_2-1)=0$$

Όμως $\chi_2\neq1\Leftrightarrow\chi_2-1\neq0$ από Α ii) οπότε

$$\beta\chi_1+\gamma(\chi_2+1)=0\overset{:(\alpha\neq0)}{\Longleftrightarrow}\frac{\beta}{\alpha}\chi_1+\frac{\gamma}{\alpha}(\chi_2+1)=0\Leftrightarrow$$

$$-(\chi_1+\chi_2)\chi_1+\chi_1\chi_2(\chi_2+1)=0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\chi_1[(\chi_2)^2-\chi_1]=0\Leftrightarrow(\chi_2)^2=\chi_1$$

διότι $\chi_1\neq0$ από Α i).

Άλλη λύση του (Β)

Διαιρώντας την σχέση $\alpha(\chi_1)^2+\beta\chi_1\chi_2+\gamma(\chi_2)^2=0$ με $(\chi_2)^2\neq 0$ βρίσκουμε $\alpha(\frac{\chi_1}{\chi_2})^2+\beta(\frac{\chi_1}{\chi_2})+\gamma=0$, επομένως θα πρέπει να ισχύει $\frac{\chi_1}{\chi_2}=\chi_1$ ή $\frac{\chi_1}{\chi_2}=\chi_2$. Η πρώτη σχέση είναι αδύνατη γιατί μας δίνει $\chi_2=1$ το οποίο δεν ισχύει σύμφωνα με το ερώτημα (Α). Έτσι απομένει η δεύτερη σχέση η οποία μας δίνει $(\chi_2)^2=\chi_1$.

Γ) $$(4)\xrightarrow{:(\alpha^2)\neq 0}\chi_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+(\chi_1+\chi_2)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)+\chi_2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\chi_1(\chi_1+\chi_2)^2+(\chi_1+\chi_2)^2\chi_1\chi_2+\chi_2(\chi_1\chi_2)^2=0.\ \text{Όμως}\ \chi_1=(\chi_2)^2$$

$$(\chi_2)^2[(\chi_2)^2+\chi_2]^2+[(\chi_2)^2+\chi_2]^2(\chi_2)^2\chi_2+(\chi_2)^3(\chi_2)^4=0\xLeftrightarrow{:(\chi_2)^2\neq 0}$$

$$(\chi_2)^2(\chi_2+1)^2+\chi_2(\chi_2)^2(\chi_2+1)^2+(\chi_2)^5=0\xLeftrightarrow{:(\chi_2)^2\neq 0}$$

$$(\chi_2+1)^2+\chi_2(\chi_2+1)^2+(\chi_2)^3=0\Leftrightarrow$$

$$(\chi_2+1)^2(\chi_2+1)=-(\chi_2)^3\Leftrightarrow$$

$$(\chi_2+1)^3=(-\chi_2)^3\Leftrightarrow$$

$$\chi_2+1=-\chi_2\Leftrightarrow$$

$$\chi_2=-\frac{1}{2}\ \text{και άρα}\ \chi_1=\frac{1}{4}$$

Άλλη λύση του (Γ)

$\chi_1\beta^2-(\chi_1+\chi_2)\beta\gamma+\chi_2\gamma^2=0 \Leftrightarrow \chi_1\beta^2-\chi_1\beta\gamma-\chi_2\beta\gamma+\chi_2\gamma^2=0 \Leftrightarrow \chi_1\beta(\beta-\gamma)-\chi_2\gamma(\beta-\gamma)=0$ $\Leftrightarrow(\beta-\gamma)(\chi_1\beta-\chi_2\gamma)=0 \Leftrightarrow \beta=\gamma$ ή $\chi_1\beta-\chi_2\gamma=0$.

- Αν $\beta=\gamma$ τότε δεδομένου ότι $\chi_1+\chi_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $\chi_1\chi_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ θα ισχύει $\chi_1+\chi_2+\chi_1\chi_2=0$. Όμως $\chi_1=\chi_2^2$ κι έτσι $\chi_2^2+\chi_2+\chi_2^3=0 \Leftrightarrow \chi_2(\chi_2^2+\chi_2+1)=0 \Leftrightarrow \chi_2=0$ ή $\chi_2^2+\chi_2+1=0$. Η περίπτωση $\chi_2=0$ απορρίπτεται από το (Α), ενώ η περίπτωση $\chi_2^2+\chi_2+1=0$ απορρίπτεται γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=-3<0$.
- Θα πρέπει λοιπόν $\chi_1\beta-\chi_2\gamma=0$. Θα έχουμε επομένως $\beta\chi_2^2=\gamma\chi_2 \Leftrightarrow \chi_2=\frac{\gamma}{\beta}$ ($\beta\neq 0$ γιατί διαφορετικά θα είχαμε και $\gamma=0$). Από τη σχέση $\chi_1\chi_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ βρίσκουμε τώρα $\chi_1=\frac{\beta}{\alpha}$. Η σχέση $\chi_1+\chi_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ δίνει $\chi_1+\chi_2=-\chi_1 \Leftrightarrow \chi_2=-2\chi_1 \Leftrightarrow \chi_2=-2\chi_2^2 \Leftrightarrow \chi_2=-\frac{1}{2}$ κι έτσι $\chi_1=\frac{1}{4}$.

Θέμα Β

Δίνεται στο διπλανό σχήμα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ **με πλευρά μήκους 1**.

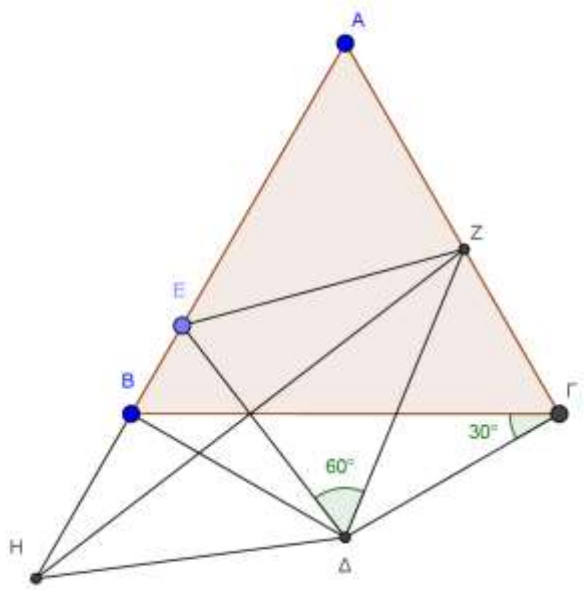
Ισχύει ότι ΒΔ=ΔΓ, ΖΓ=ΒΗ καθώς και $\widehat{B\Gamma\Delta} = 30°, \widehat{E\Delta Z} = 60°$.

Να δειχθεί ότι:

Α. ΔΖ=ΔΗ

Β. Το ΔΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΗ.

Γ. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΑΕΖ.



Λύση

Α) Αφού το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές και $\mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta} = 30°$ άρα $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = 120°$ και $\mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 30°$

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΔΖΓ και ΒΗΔ

ΒΔ=ΔΓ (υποθ) ,

$\mathrm{H\hat{B}\Delta} = \mathrm{Z\hat{\Gamma}\Delta} = 90°$ $(\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} + \mathrm{\Gamma\hat{B}\Delta} = 60° + 30° = 90°$

έτσι $\mathrm{H\hat{B}\Delta} = 90°, \mathrm{Z\hat{\Gamma}\Delta} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} + \mathrm{B\hat{\Gamma}\Delta} = 60° + 30° = 90°)$

ΖΓ=ΒΗ (υποθ)

Άρα από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων έχουμε ΔΖ=ΔΗ και $\Gamma\hat{\Delta}Z = B\hat{\Delta}H$

Β) Αφού $B\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}Z + 60° + B\hat{\Delta}E = B\hat{\Delta}H + 60° + B\hat{\Delta}E = H\hat{\Delta}Z$ θα είναι $H\hat{\Delta}Z = 120°$ και αφού $E\hat{\Delta}Z = 60°$ προκύπτει ότι $H\hat{\Delta}E = 60°$ κι έτσι ΔΕ διχοτόμος της ΗΔΖ. Όμως το τρίγωνο ΔΗΖ είναι ισοσκελές λόγω του Α ερωτήματος συνεπώς η ΔΕ θα είναι μεσοκάθετος του ΗΖ.

Γ) Αφού ΔΕ μεσοκάθετος του ΗΖ, το ΕΖΗ είναι ισοσκελές τρίγωνο και άρα **ΕΖ=ΕΗ=ΒΕ+ΒΗ=ΒΕ+ΓΖ**. Επομένως η περίμετρος του ΑΕΖ είναι Π=ΑΕ+ΕΖ+ΑΖ=ΑΕ+ΒΕ+ΓΖ+ΑΖ=ΑΒ+ΑΓ=1+1=2.