*Σύλλογος Θετικών*
*Επιστημόνων Δράμας*

**Διαγωνισμός στη μνήμη**
**του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου**

# Μαθηματικά Τάξη: Γ΄

**Δράμα 03 Απριλίου 2016**

## Θέμα Α

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x+\lambda$ με $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και $\lambda\in R$.

**Α₁.** Για ποιά τιμή του λ, υπάρχουν σημεία της $C_f$ στα οποία η εφαπτομένη της είναι η ευθεία **y=x**;

**Α₂.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

**Α₃.** Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της $C_f$ με τον άξονα χ΄χ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

## Θέμα Β

Δίνεται η μη μηδενική συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει:

- $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x\in R$ **(1).**

**Β₁.** Να καθορίσετε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την **(1).**

**Β₂.** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

**Β₃.** **i)** Αν η $f$ έχει ρίζα το $x_0$, να δείξετε ότι έχει ένα (ολικό) ακρότατο και ένα σημείο καμπής.

**ii)** Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι θέσεις του ακροτάτου και του σημείου καμπής αντίστοιχα, να δείξετε ότι οι αριθμοί $x_0$, $x_1$, $x_2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**Β₄.** Αν η $f$ παρουσιάζει στο $x_1$ μέγιστο το **1**:

**i)** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

**ii)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f$, αν επιπλέον $f(0)=1$.

***ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

*Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας*

# Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

**<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u>**

# Μαθηματικά Τάξη: Γ΄

**Δράμα 03 Απριλίου 2016**

## *<u>Θέμα Α</u>*

**Α₁.** Η ευθεία (ε): y=x έχει $\lambda_\varepsilon = 1$. Εξετάζουμε αν υπάρχει σημείο $\left(x_0, f(x_0)\right)$ της $C_f : f'(x_0) = 1$.

$f'(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x$. Οπότε $f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x = 1$. (1)

Προφανής ρίζα της (1) στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ το $x_0 = 0$. $f(0) = 1 + \lambda$ και $f'(0) = 1$.

Η εφαπτομένη της $C_f$ στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + \lambda + 1$.

Θέλουμε η εφαπτομένη να είναι η (ε): y=x. Άρα πρέπει $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

Θα δείξουμε ότι η (1) δεν έχει άλλη λύση στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Θέτουμε $g(x) = e^x\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu x - 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε εύκολα $g'(x) = -2e^x\eta\mu x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ μοναδική λύση στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2e^x\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x < 0$. Άρα $g'(x) > 0$ στο $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ και $g'(x) < 0$ στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

$$maxg = g(0) = 0$$

Και προφανώς το 0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

Άρα μοναδική τιμή του λ είναι το -1.

**Α₂.** $f'(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \overset{:\sigma\upsilon\nu x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta\ \sigma\tau o\ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με μοναδική ρίζα το $\frac{\pi}{4}$. Άρα διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ και $(,\frac{\pi}{4}\ \frac{\pi}{2}]$. $f'(0) = 1 > 0$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}} < 0$. Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |
| | λ | | $maxf = f(\frac{\pi}{4})$ | | λ |

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda.$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $A = \left[\lambda, e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda\right]$.

**A3.** Ψάχνουμε πλήθος ριζών της $f(x) = 0$ στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

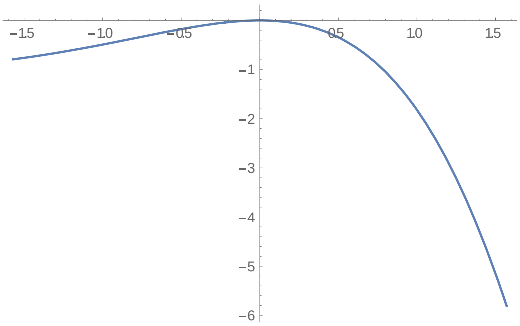
I. Αν λ>0 από το σύνολο τιμών το $0 \notin A$. Άρα η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

II. Αν λ=0 από το σύνολο τιμών A και τον πίνακα μονοτονίας έχουμε δύο ρίζες : $\pm\frac{\pi}{2}$.

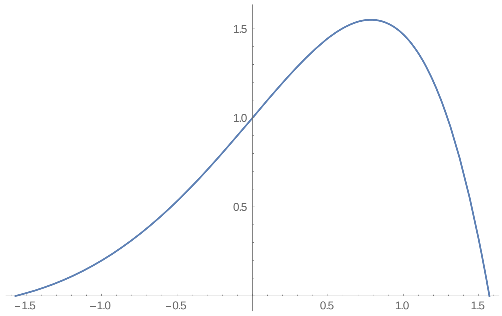
III. Αν λ<0 : όταν $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$ $\eta$ $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

όταν $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$ $\eta$ $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $\chi_0 = \frac{\pi}{4}$.

όταν $e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$ και τελικά $\lambda \in \left(-\frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}, 0\right)$, $\eta$ $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.




$g(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu x - 1, \ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$




$f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

# ***Θέμα B***

**B1.** $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)+f'(x)+2(f'(x)+f(x))=0$. Θέτουμε $g(x)=f'(x)+f(x)$. Τότε θα έχουμε $g'(x)+2g(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}g'(x)+2e^{2x}g(x)=0 \Leftrightarrow (e^{2x}g(x))'=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι προκύπτει ότι $e^{2x}g(x)=c$ (c σταθερός αριθμός). Άρα $g(x)=ce^{-2x}$.

Θα είναι λοιπόν τώρα $f'(x)+f(x)=ce^{-2x} \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=ce^{-x} \Leftrightarrow (e^x f(x))'=(-ce^{-x})' \Leftrightarrow$ $e^x f(x)=-ce^{-x}+c_1 \Leftrightarrow$ $f(x)=-ce^{-2x}+c_1e^{-x}$ . Αν θέσουμε $c_2=-c$ βρίσκουμε τελικά ότι η γενική μορφή των λύσεων της δοσμένης εξίσωσης είναι $f(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$. Αφού αναζητούμε λύσεις μη μηδενικές θα πρέπει επιπλέον $|c_1|+|c_2| \neq 0$.

**B2.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}\right) = 0 + 0 = 0.$$

**B3.** $f(x)=0 \Leftrightarrow c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}(c_1+c_2e^{-x})=0 \Leftrightarrow e^{-x}=-\frac{c_1}{c_2}$. (Αφού υποθέσαμε ότι υπάρχει ρίζα της f, θα πρέπει $c_1c_2<0$). Έτσι $\chi_0=-\ln(-c_1/c_2)$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -c_1e^{-x}-2e^{-2x}c_2=0 \Leftrightarrow -e^{-x}(c_1+2c_2e^{-x})=0 \Leftrightarrow e^{-x}=-c_1/2c_2 \Leftrightarrow x_1=-\ln(-c_1/2c_2)$. Εκατέρωθεν του $x_1$ η f' αλλάζει πρόσημο άρα το $x_1$ είναι θέση (ολικού) ακροτάτου.

Επίσης $f''(x)=0 \Leftrightarrow c_1e^{-x}+4c_2e^{-2x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}(c_1+4c_2e^{-x})=0 \Leftrightarrow e^{-x}=-c_1/4c_2$ επομένως θα ισχύει $x_2=-\ln(-c_1/4c_2)$. Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x_2$ άρα στη θέση αυτή έχουμε σημείο καμπής.

Παρατηρούμε τώρα ότι $x_1-x_0=-\ln(-c_1/2c_2)+\ln(-c_1/c_2)=\ln(-c_1/c_2:(-c_1/2c_2))=\ln 2$

$x_2-x_1==-\ln(-c_1/4c_2)+\ln(-c_1/2c_2)=\ln(-c_1/2c_2:(-c_1/4c_2))=\ln 2$. Δηλαδή οι αριθμοί $x_0,x_1,x_2$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

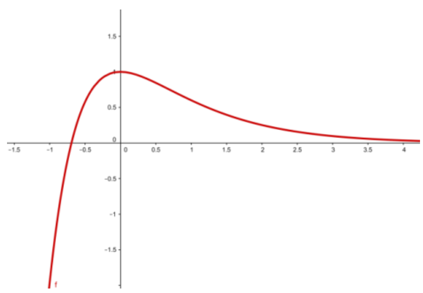
**B4.** Η τιμή του μεγίστου θα είναι $f(x_1)=c_1e^{\ln(-\frac{c_1}{2c_2})}+c_2e^{2\ln(-\frac{c_1}{2c_2})}= c_1(-c_1/2c_2)+c_2(-c_1/2c_2)^2=-c_1^2/2c_2+c_1^2/4c_2=-c_1^2/4c_2$.

Αφού $f(x_1)=1$ θα έχουμε $c_1^2=-4c_2$. Θα πρέπει συνεπώς να ισχύει $c_2<0$ και αφού $c_1c_2<0$ θα είναι επίσης $c_1>0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(c_1e^{-x}-\frac{c_1^2}{4}e^{-2x}\right) = \lim_{x\to-\infty} c_1e^{-x}\left(1-\frac{c_1}{4}e^{-x}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty.$$

Με το επιπλέον δεδομένο $f(0)=1$ έχουμε $c_1+c_2=1$ και αφού $c_1^2=-4c_2$, βρίσκουμε $c_1=2$, $c_2=-1$. Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της f, φαίνονται παρακάτω:

| x | $-\infty$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | + | + | - | - | |
| f'' | - | - | - | + | |
| f | $-\infty$ 6 | 6 | 8 | 7 0 | |



Καλή επιτυχία στις πανελλαδικές εξετάσεις.