Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Β΄

Δράμα 03 Απριλίου 2016

Θέμα Α

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^{\nu} + 2\chi^{\nu-1} + 3\chi + \nu^2 + 2\nu - 20$.
Αν ν είναι φυσικός αριθμός και το $P(\chi)$ έχει για ρίζα το -1 να δείξετε ότι:

A_1. Το $P(\chi)$ είναι 4ου Βαθμού.

A_2. Το $P(\chi)$ δεν έχει άλλες ακέραιες ρίζες.

A_3. Να λυθεί στο R η ανίσωση: $P(\chi) + P(-\chi) < 16$.

A_4. Να λυθεί η εξίσωση $P(\chi)P(-\chi) + 84 = 0$ στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Θέμα Β

Δίνονται οι ευθείες:
(ε_1): $\psi = 0$ και **(ε_2)** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με την **ε_1** οξεία γωνία ω μοιρών.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ορίζουν οι 2 ευθείες των οποίων το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις ευθείες **ε_1** και **ε_2** είναι σταθερό και ίσο με **c** > 0.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά Τάξη: Β΄

Δράμα 03 Απριλίου 2016

Θέμα Α

Α$_1$. $P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^{\nu}+2(-1)^{\nu-1}-3+\nu^2+2\nu-20=0.$ (1)

Αν ν περιττός φυσικός τότε η (1) γίνεται:

$-1+2-3+\nu^2+2\nu-20=0 \Leftrightarrow \nu^2+2\nu-22=0.$

Δ=92 όχι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού, οπότε ν όχι φυσικός. Άρα ο ν άρτιος φυσικός. Τότε η (1) γίνεται:

$1-2-3+\nu^2+2\nu-20=0 \Leftrightarrow \nu^2+2\nu-24=0.$

Εύκολα ν=4 ή ν=-6 απορρίπτεται (όχι φυσικός).

Άρα ν=4 και $P(x)=x^4+2x^3+3x+4.$

Α$_2$. Διαιρέτες του σταθερού όρου, του 4, είναι: $\pm1, \pm2, \pm4.$ Οι θετικοί διαιρέτες απορρίπτονται διότι όλοι οι συντελεστές είναι ομόσημοι. Επίσης $P(-2)\neq 0$ και $P(-4)\neq 0.$ Άρα μοναδική ακέραια ρίζα είναι το -1.

Α$_3$. $P(x)+P(-x)<16 \Leftrightarrow x^4+2x^3+3x+4+x^4-2x^3-3x+4<16 \Leftrightarrow 2x^4<8 \Leftrightarrow x^4<4 \Leftrightarrow$

$(x^2+2)(x^2-2)<0 \Leftrightarrow x^2-2<0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<\chi<\sqrt{2}.$

Α$_4$. $P(x)\cdot P(-x)+84=0 \Leftrightarrow (x^4+2x^3+3x+4)\cdot(x^4-2x^3-3x+4)+84=0 \Leftrightarrow$

$(x^4+4)^2-(2x^3+3x)^2+84=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^8-4x^6-4x^4-9x^2+100=0$ (2)

Θέτουμε $x^2=\omega>0$ (το 0 όχι ρίζα της εξίσωσης). Η (2) γράφεται:

$\omega^4 - 4\omega^3 - 4\omega^2 - 9\omega + 100 = 0$. (3) Επειδή θέλουμε λύση για το x στο $\mathbb{Z}$, θα πρέπει να πάρουμε τους θετικούς διαιρέτες του 100 που είναι τέλεια τετράγωνα φυσικών. Δηλαδή τους: 1,4,25,100.

Σχήμα Horner για ω=4 :

1	-4	-4	-9	100	ρ=4
	4	0	-16	-100	
1	0	-4	-25	0	

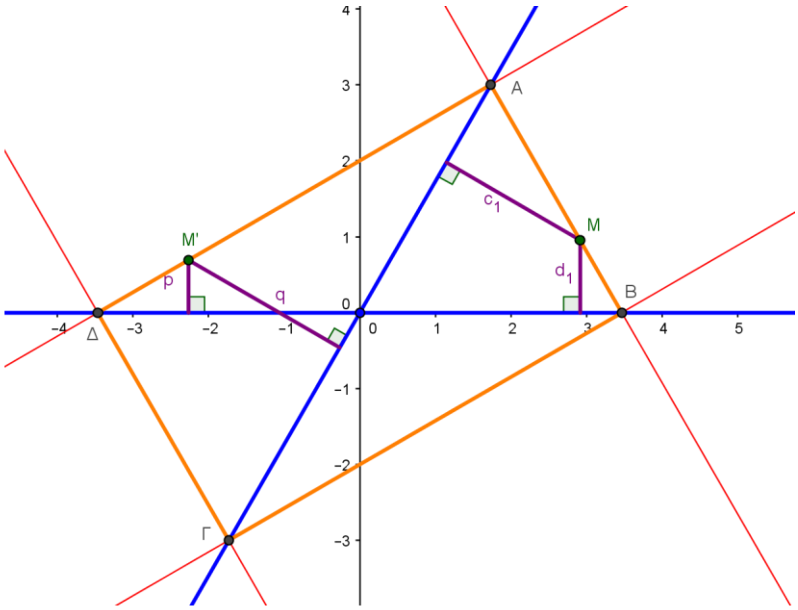
Η (3) γράφεται: $(\omega - 4) \cdot (\omega^3 - 4\omega - 25) = 0$.

Ο δεύτερος παράγοντας $\omega^3 - 4\omega - 25 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Πιθανές ακέραιες ρίζες που είναι και τετράγωνα φυσικών είναι οι: 1 και 25 αλλά καμιά τελικά δεν την επαληθεύει. Άρα ω=4 μοναδική λύση.

Τελικά $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

<u>Θέμα Β</u>



Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων όπου ο άξονας x'x ταυτίζεται με την ε_1, ενώ ο άξονας y'y είναι η κάθετη στο σημείο τομής O των ε_1, ε_2.

Ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων η ε_1 έχει εξίσωση ε_1: y=0 ενώ η ε_2 έχει εξίσωση ε_2: y=(εφω)x ⇔ y-(εφω)x=0.

Αν M(x,y) τυχαίο σημείο του γ.τ. τότε $d(M,\varepsilon_1)+d(M,\varepsilon_2)=c \Leftrightarrow |\psi|+\frac{|\psi-\varepsilon\phi\omega\cdot x|}{\sqrt{1+\varepsilon\phi^2\omega}}=c \Leftrightarrow$

|y|+συνω|y-(εφω)x|=c. Απαλείφοντας τις απόλυτες τιμές προκύπτουν οι εξισώσεις:

- y-συνω(y-(εφω)x)=c αν y≥ 0 και y ≤ (εφω)x , ευθύγραμμο τμήμα AB με B $(c/\eta\mu\omega, 0)$ και $A\left(\frac{c}{\varepsilon\phi\omega}, c\right)$. Το A είναι σημείο της ε_2, ενώ το B της ε_1.

- y+συνω(y-(εφω)x)=c αν y≥ 0 και y ≥ (εφω)x , ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ, όπου $\Delta(-c/\eta\mu\omega, 0)$ σημείο της ε_1 συμμετρικό του B ως προς O.

- -y+συνω(y-(εφω)x)=c αν y ≤ 0 και y ≥ (εφω)x , ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ, όπου $\Gamma\left(-\frac{c}{\varepsilon\phi\omega}, -c\right)$ συμμετρικό του A ως προς O.

- -y-συνω(y-(εφω)x)=c αν y ≤ 0 και y ≤ (εφω)x , ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ.

Οι συντελεστές διευθύνσεως των παραπάνω τμημάτων είναι: $\lambda_{AB}=-\frac{\eta\mu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\lambda_{A\Delta}=\frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\lambda_{\Delta\Gamma}=-\frac{\eta\mu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\lambda_{\Gamma B}=\frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega}$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\lambda_{\Delta\Gamma}$, $\lambda_{A\Delta}=\lambda_{B\Gamma}$ δηλαδή AB//ΔΓ και ΑΔ//ΒΓ και $\lambda_{AB}\lambda_{A\Delta}=-\frac{(\eta\mu\omega)^2}{1-(\sigma\upsilon\nu\omega)^2}=-1$ δηλαδή AB $\perp$ ΑΔ οπότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Ώστε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ το οποίο μπορούμε να καθορίσουμε ως εξής: Γράφουμε κύκλο $(O, \frac{c}{\eta\mu\omega})$. Αν Α,Β,Γ,Δ είναι τα σημεία που ο κύκλος αυτός τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, τότε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Πράγματι το τυχαίο σημείο Μ που ανήκει στην περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ θα ικανοποιεί κάποια από τις παραπάνω τέσσερις εξισώσεις πράγμα που σημαίνει ότι θα ισχύει $d(M,\varepsilon_1)+d(M,\varepsilon_2)=c$.

*** Η άσκηση μπορεί να αντιμετωπιστεί και με Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Τα σημεία του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου είναι τα σημεία της

βάσης των ισοσκελών τριγώνων με κορυφή το σημείο τομής των ευθειών

ε_1 και ε_2 και ύψη βάσεων ίσα με c.