Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά Τάξη: Α΄

Δράμα 03 Απριλίου 2016

Θέμα Α

Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x}{\alpha^{2015}\cdot\beta^{2016}}+\frac{\mathrm{x}}{\alpha^{2016}\cdot\beta^{2015}}=\frac{x^2}{\alpha^{2015}\cdot\beta^{2015}}+\frac{1}{\alpha^{2016}\cdot\beta^{2016}} \quad \textbf{(1)} \quad \text{με } \alpha,\beta\neq 0$$

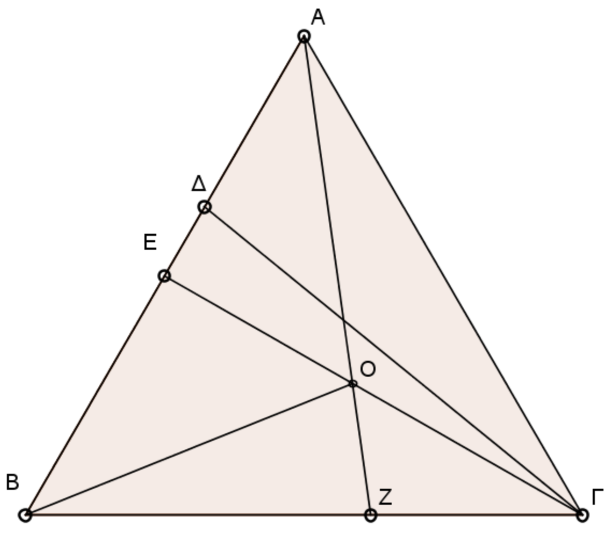
Α₁. Να λυθεί η εξίσωση **(1)**

Α₂. Αν $\alpha>\beta>0$ και x_1,x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης **(1)**, για τις οποίες ισχύει: $x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$ και $x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}$ να βρείτε τα **α** και **β**.

Α₃. Αν οι α,β είναι ομόσημοι και $\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=8$ να δείξετε ότι η αρχική εξίσωση **(1)** έχει μόνο μια λύση την οποία και να υπολογίσετε.

Θέμα Β

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ΓΕ ύψος. Έστω Ο σημείο του ΓΕ ώστε η γωνία $\mathrm{O\hat{B}\Gamma}=20^\circ$ και Δ σημείο της ΑΒ ώστε η γωνία $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=20^\circ$. Αν η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, να δείξετε ότι:



Β₁. ΟΑ=ΟΒ

Β₂. Το τρίγωνο ΒΟΖ είναι ισοσκελές.

Β₃. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΖ είναι ίσα.

Β₄. Τα τρίγωνα ΒΟΔ και ΓΟΔ είναι ισοσκελή.

<u>ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά Τάξη: Α΄

Δράμα 03 Απριλίου 2016

Θέμα Α

Α$_1$. Απαλείφουμε τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της εξίσωσης **(1)** επί $α^{2016}β^{2016}$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\frac{x}{\alpha^{2015}\cdot\beta^{2016}}+\frac{\mathrm{x}}{\alpha^{2016}\cdot\beta^{2015}}=\frac{x^2}{\alpha^{2015}\cdot\beta^{2015}}+\frac{1}{\alpha^{2016}\cdot\beta^{2016}}\Leftrightarrow$$

$$a\cdot x+\beta\cdot x=\alpha\cdot\beta\cdot x^2+1\Leftrightarrow\ a\cdot\beta\cdot x^2-(\alpha+\beta)\cdot x+1=0\overset{\alpha\cdot\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot x+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=0\Leftrightarrow$$

Στην τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι $S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\mathrm{P}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$

Συνεπώς οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι: $x_1=\frac{1}{\alpha}$ και $x_2=\frac{1}{\beta}$.

Α$_2$. Έχουμε $\mathrm{x}_1+x_2=\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\frac{a+\beta}{a\cdot\beta}=\frac{3}{2}$ **(2)**

Επίσης $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ a\cdot\beta=2$ **(3)**

Από τις (2), (3) προκύπτουν οι σχέσεις α+β=3 και αβ=2 οπότε

α=2, β=1. (α>β>0)

Α$_3$. $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^2=8\Leftrightarrow\ a^2+2\cdot a\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta^2}+\beta^2+2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\beta+\frac{1}{\alpha^2}=8$

$$a^2+\frac{1}{\alpha^2}-2+\beta^2+\frac{1}{\beta^2}-2+2\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2+2\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\cdot\beta}=0$$

Επομένως θα πρέπει $\alpha-\frac{1}{\alpha}=0$ και $\beta-\frac{1}{\beta}=0$ και $(\alpha-\beta)^2=0$

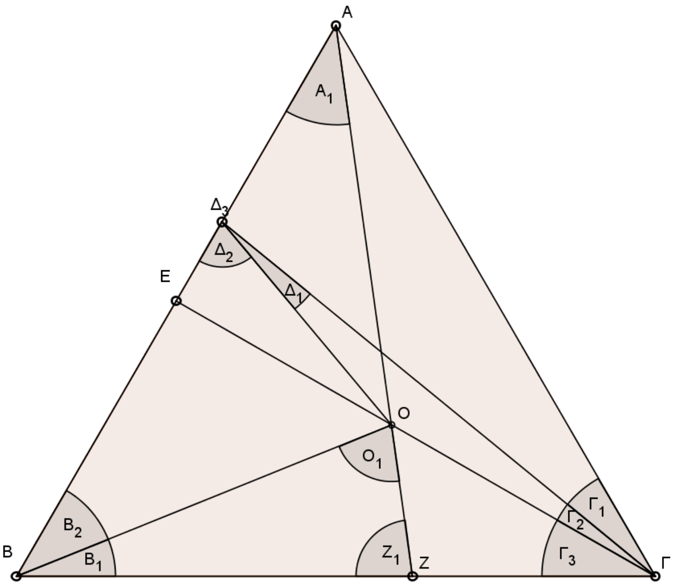
δηλαδή $α^2=1$ και $β^2=1$ και α=β. Αφού οι α,β είναι ομόσημοι θα πρέπει α=β=-1 ή α=β=1. Στην πρώτη περίπτωση για τις λύσεις της εξίσωσης **(1)** ισχύει $x_1=x_2=-1$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση $x_1=x_2=1$.

Στην 1η περίπτωση η **(1)** $\Rightarrow$ $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Στην 2η περίπτωση η **(1)** $\Rightarrow$ $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Θέμα Β

Β₁. Η ΓΕ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ, άρα ΟΑ=ΟΒ.



Β₂. ΟΑ=ΟΒ. Άρα $\hat{B}_2 = \hat{A}_1 = 40°$ και στο τρίγωνο ΑΒΖ: $\hat{Z}_1 = 80°$. Και τελικά από το τρίγωνο ΒΟΖ: $\hat{O}_1 = 80°$.

Άλλος τρόπος: $\hat{O}_1 = 80°$ ως εξωτερική του τριγώνου ΑΒΟ. Οπότε το τρίγωνο ΒΟΖ είναι ισοσκελές.

Β₃. Σύγκριση των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΖ: Έχουν ΑΒ=ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο), $\hat{B}$ κοινή και $\hat{A}_1 = \Delta\hat{\Gamma}B = 40°$ ($\Delta\hat{\Gamma}B = 60° - \hat{\Gamma}_1 = 40°$). Από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε ΒΖ=ΔΒ.

Β₄. Προφανώς ΒΟ=ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΒΟΔ είναι ισοσκελές. Αφού $\hat{B}_2 = 40°$,

η $\hat{\Delta}_2 = \dfrac{180-40}{2} = 70°$. Στο τρίγωνο ΒΓΔ: $\Delta\hat{B}\Gamma = 60°$, $\Delta\hat{\Gamma}B = 40°$ και άρα $B\hat{\Delta}\Gamma = 80°$.

Οπότε $\hat{\Delta}_1 = 10°$. Επίσης: $\hat{\Gamma}_3 = \dfrac{A\hat{\Gamma}B}{2} = 30°$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 40°$. Οπότε $\hat{\Gamma}_2 = 10°$.

Και προφανώς το τρίγωνο ΟΓΔ ισοσκελές.