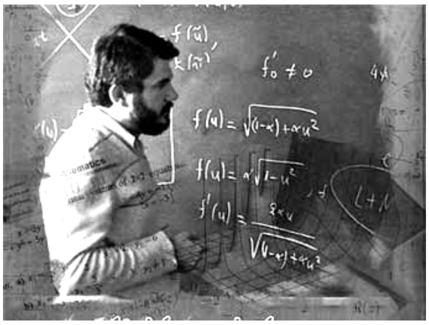
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Β΄

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

Θέμα Α

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-\kappa\cdot x+\kappa-2$ **κ: θετικός ακέραιος.**

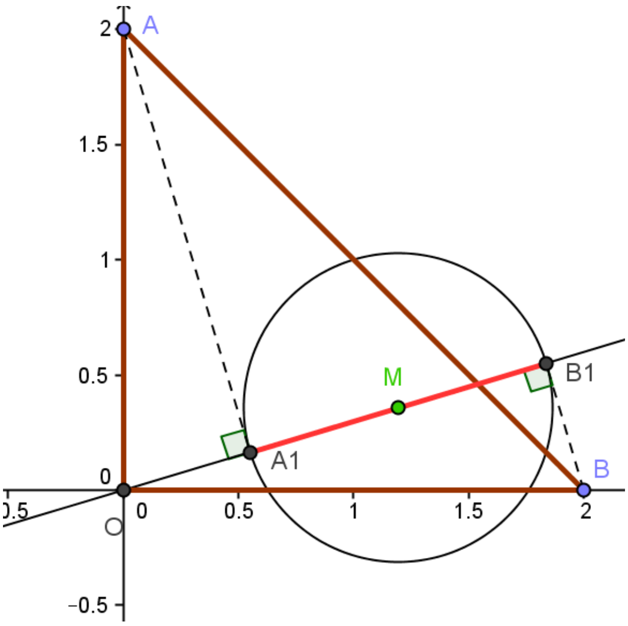
A_1. Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε το P(x) να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

A_2. Αν το P(x) έχει μία ακέραια ρίζα, να δείξετε ότι δεν μπορεί να είναι διπλή.

A_3. Αν ο αριθμός $2\cdot e^{\eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\theta}$ είναι ακέραια ρίζα του P(x), να βρεθούν οι γωνίες ϕ και θ.

Θέμα Β

Θεωρούμε τα σημεία A(0,2) , B(2,0) και τις προβολές A_1, B_1 των A, B αντίστοιχα, στην μεταβλητή ευθεία ε που περνά από την αρχή των αξόνων.



B_1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων A_1B_1.

B_2. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι με διάμετρο το τμήμα A_1B_1, διέρχονται από ένα σταθερό σημείο .

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u> : Τάξη: Β΄

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

***Α*₁**. Αν ρ είναι ρίζα του P(χ), τότε P(ρ) = 0.

$$\Leftrightarrow \rho^4 - \kappa\cdot\rho + \kappa - 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa(1-\rho) = 2-\rho^4 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{\rho^4-2}{\rho-1}.$$

Από ευκλείδια διαίρεση $\rho^4 - 2 : \rho - 1$ προκύπτει

$$\kappa = \frac{\rho^4-2}{\rho-1} = \frac{(\rho-1)(\rho^3+\rho^2+\rho+1)-1}{\rho-1} = \rho^3+\rho^2+\rho+1+\frac{-1}{\rho-1}.$$

Επειδή κ είναι θετικός ακέραιος θα πρέπει $\frac{-1}{\rho-1} \in Z$. Δηλαδή το ρ – 1 πρέπει να διαρεί το -1. Άρα ρ = 2 ή ρ = 0.

Για ρ = 2, κ = 14 και για ρ = 0, κ = 2.

***Α*₂**. Αν ρ είναι διπλή ακέραια ρίζα τότε $P(\chi) = (\chi - \rho)^2 Q(\chi)$ με Q(χ) να είναι της μορφής $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$. Τότε:

$P(\chi) = (\chi^2 - 2\rho\chi + \rho^2)(\chi^2 + \beta\chi + \gamma)$ για κάθε $\chi \in R$.

$P(\chi) = \chi^4 + \beta\chi^3 + \gamma\chi^2 - 2\rho\chi^3 - 2\rho\beta\chi^2 - 2\rho\gamma\chi + \rho^2\chi^2 + \rho^2\beta\chi + \rho^2\gamma \Leftrightarrow$

$P(\chi) = \chi^4 + (\beta - 2\rho)\chi^3 + (\gamma - 2\rho\beta + \rho^2)\chi^2 + (-2\rho\gamma + \rho^2\beta)\chi + \rho^2\gamma$. Άρα θα πρέπει:

$\beta - 2\rho = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\rho$

$\gamma - 2\rho\beta + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 3\rho^2$

$-2\rho\gamma + \rho^2\beta = -\kappa \Leftrightarrow -2\rho 3\rho^2 + \rho^2 2\rho = -\kappa \Leftrightarrow 4\rho^3 = \kappa$

$\rho^2\gamma = \kappa - 2 \Leftrightarrow \rho^2 3\rho^2 = \kappa - 2 \Leftrightarrow 3\rho^4 = 4\rho^3 - 2 \Leftrightarrow 3\rho^4 - 4\rho^3 + 2 = 0$ το οποίο δεν έχει ακέραια ρίζα.

<u>2ος τρόπος</u>

Για κ = 14 $P(\chi) = (\chi - 2)(\chi^3 + 2\chi^2 + 4\chi - 6)$ και το 2 δεν είναι ρίζα του $\chi^3 + 2\chi^2 + 4\chi - 6$.

Για κ = 2 $P(\chi) = \chi^4 - 2\chi = \chi(\chi^3 - 2)$ με το μηδέν μοναδική ακέραια ρίζα.

***Α*₃**. Αν κ = 2 τότε 0 μοναδική ακέραια ρίζα. Όμως $2\cdot e^{\eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\theta} \neq 0$.

Άρα θα πρέπει κ = 14 και ακέραια ρίζα το 2.

Άρα $2\cdot e^{\eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 2 \Leftrightarrow e^{\eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\theta} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$

Τελικά φ = λπ και θ = 2κπ + $\frac{\pi}{2}$ με κ, λ $\in Z$.

B_1.

- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον ψ΄ψ τότε θα έχει εξίσωση χ=0 και θα έχουμε $A \equiv A_1$ και $B_1 \equiv O$ οπότε το μέσο του τμήματος A_1B_1 θα είναι το μέσο Ν(0,1) του ΟΑ.
- Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον χ΄χ, τότε θα έχει εξίσωση ψ=0 και θα έχουμε $B \equiv B_1$, $A_1 \equiv O$,επομένως το μέσο του A_1B_1 θα είναι το μέσο Λ(1,0) του ΟΒ.

Σε κάθε άλλη περίπτωση η ευθεία ε θα έχει τη μορφή ψ=λχ (1) με $\lambda \in R^*$.

Οι ευθείες AA_1 και BB_1 έχουν συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{\lambda}$ και οι εξισώσεις τους θα είναι

AA_1: $\psi = -\frac{1}{\lambda}\chi + 2$ (2)

BB_1 : $\psi = -\frac{1}{\lambda}\chi + \frac{2}{\lambda}$ (3)

Λύνοντας τα συστήματα των (1), (3) έχουμε $\begin{cases} \psi = \lambda\chi \\ \psi = -\frac{1}{\lambda}\chi + \frac{2}{\lambda} \end{cases}$ άρα:

$\lambda \cdot x = -\frac{1}{\lambda}x + 2\lambda \Leftrightarrow x = \frac{2}{1+\lambda^2}$ και $\psi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ Άρα $B_1(\frac{2}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1+\lambda^2})$

Ομοίως βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα των (1),(2) ότι $A_1(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2})$

Το μέσο Μ του A_1B_1 είναι $\mathrm{M}\left(\frac{\lambda+1}{1+\lambda^2}, \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1}\right)$

Θέτουμε χ= $\frac{\lambda+1}{\lambda^2+1}$ και ψ= $\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1}$ τότε ψ=λχ οπότε για χ≠0 θα έχουμε

$$\chi = \frac{\frac{\psi}{\chi}+1}{(\frac{\psi}{\chi})^2+1} \Leftrightarrow \chi = \frac{\frac{\psi+\chi}{\chi}}{\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^2}} \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2 = \chi+\psi \Leftrightarrow \chi^2+\psi^2-\chi-\psi = 0 \quad (4)$$

Η (4) παριστάνει κύκλο κέντρου $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνας ρ=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα σημεία Ν, Λ ανήκουν επίσης στον κύκλο (Κ.ρ).

Αντιστρόφως αν Μ΄(χ,ψ) τυχαίο σημείο του παραπάνω κύκλου όπου Μ΄≠ Ν,Λ,Ο. θέτοντας $\lambda = \frac{\psi}{x}$, και προβάλλοντας τα Α, Β στην ευθεία ΟΜ΄ το Μ΄ θα είναι το μέσο του τμήματος A_1B_1 λόγω της (4).

Τα Ν, Λ είναι μέσα των προβολών των Α,Β πάνω στις ευθείες ψ΄ψ και χ΄χ, ενώ το Ο είναι μέσο των προβολών των Α,Β στην ευθεία ψ=-χ.

B_2.

Ο κύκλος διαμέτρου A_1B_1 έχει εξίσωση

$$\left(\chi - \frac{\lambda+1}{\lambda^2+1}\right)^2 + \left(\psi - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1}\right)^2 = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda^2+1}\right)^2(\lambda^2+1)$$ όπου λ∈R (*)

Για λ=0 έχουμε τον κύκλο $(\chi-1)^2+\psi^2=1$ (5)

για λ=-1 έχουμε τον κύκλο $\chi^2+\psi^2=2$ (6)

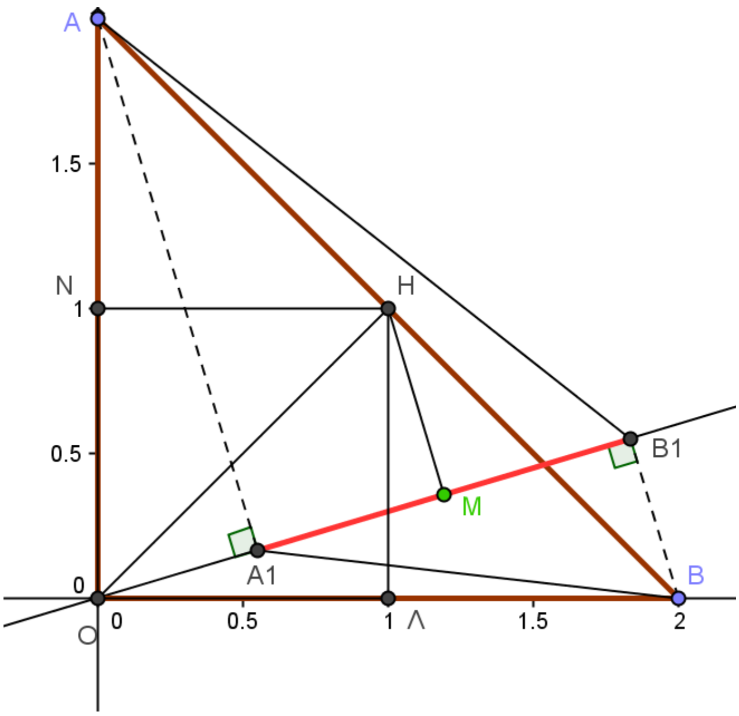
Η λύση του συστήματος των (5),(6) δίνει (χ,ψ)=(1,1) ή (χ,ψ)=(1,-1).

Από τα παραπάνω σημεία εύκολα επαληθεύουμε ότι μόνο το (1,1) ικανοποιεί την εξίσωση (*) για κάθε λ∈R.

Έτσι όλοι οι κύκλοι διαμέτρου A_1B_1 διέρχονται από το σταθερό σημείο (1,1) το οποίο είναι το ίχνος της προβολής του Ο πάνω στην ΑΒ (και ταυτόχρονα στην προκειμένη περίπτωση το μέσο του τμήματος ΑΒ).

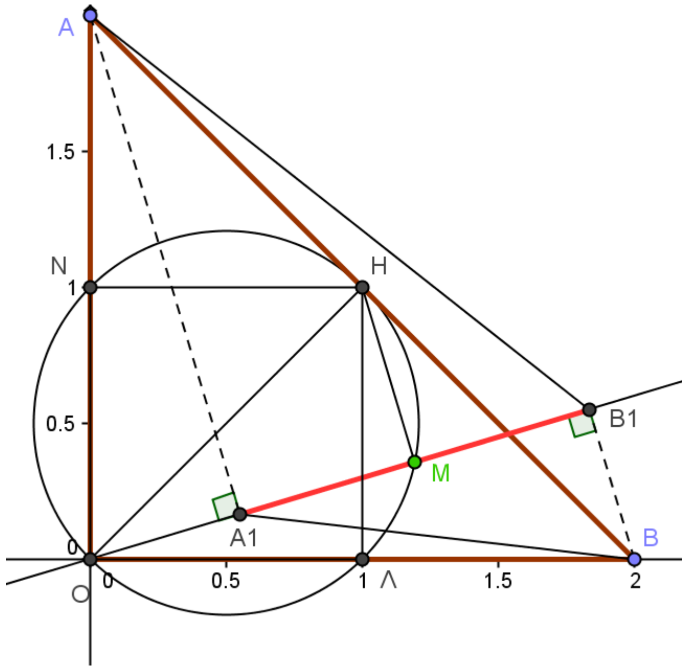
Β΄ τρόπος

B_1.



Το τετράπλευρο AA_1BB_1 είναι τραπέζιο αφού AA_1 // BB_1. Αν Η το μέσο του ΑΒ τότε ΗΜ // AA_1 επομένως ΗΜ ⊥ A_1B_1. Δηλαδή το σταθερό τμήμα

ΟΗ φαίνεται από το σημείο Μ υπό ορθή γωνία, άρα το Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΟΗ=ΝΛ.



Τα μέσα Ν, Λ, Η των ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ είναι σημεία του ζητούμενου γ.τ. και ανήκουν επίσης στον παραπάνω κύκλο. (ως ειδικές περιπτώσεις όπου η ευθεία ε ταυτίζεται τον ψ΄ψ, χ΄χ και την ευθεία ΟΗ). Το σημείο Ο επίσης είναι σημείο του γ.τ. (περίπτωση όπου ε // ΑΒ) και ανήκει στον παραπάνω κύκλο.

<u>Αντίστροφα</u>, αν Μ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου διαμέτρου ΟΗ, διαφορετικό από τα Ο,Ν (τα οποία όπως επισημάναμε είναι σημεία του γ.τ) θεωρώντας την ευθεία ΟΜ και προβάλλοντας τα Α,Β πάνω σ' αυτήν δεδομένου ότι $HM \perp A_1B_1$ θα είναι $HM // AA_1$ οπότε η ΗΜ θα διέρχεται από το μέσο του τμήματος A_1B_1.

B_2. Αν $OH \perp AB$ θα δείξουμε ότι το σημείο Η ανήκει πάντοτε στους κύκλους διαμέτρου A_1B_1. Το τετράπλευρο AHA_1O είναι εγγράψιμο γιατί το ΟΑ φαίνεται υπό ορθή γωνία από τα σημεία A_1 και Η. Θα έχουμε λοιπόν $\widehat{A_1HB} = \widehat{AOA_1}$. Επίσης το τετράπλευρο OHB_1B είναι εγγράψιμο αφού το ΟΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία από τα Η και B_1. Έτσι $\widehat{BHB_1} = \widehat{BOB_1}$. Έτσι $A_1\hat{H}B_1 = 90^O$ δηλαδή το Η ανήκει στον κύκλο διαμέτρου A_1B_1. Αν υπήρχε και δεύτερο σταθερό σημείο Η΄ τότε το κέντρο Μ θα βρισκόταν στην σταθερή μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΗΗ΄ πράγμα αδύνατο αφού ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι κύκλος.