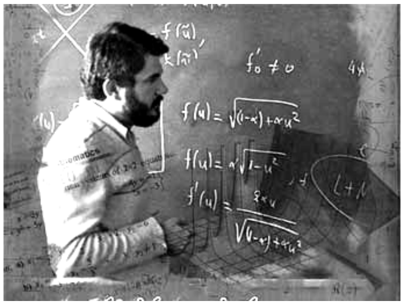
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

Θέμα Α

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 2\cdot 2014\cdot x - \kappa^2 - 1, \quad \kappa \in R$.

Α1. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Α2. Αποδείξτε ότι $|x_1 - 2013| < |2013 - x_2|$.

Α3. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης

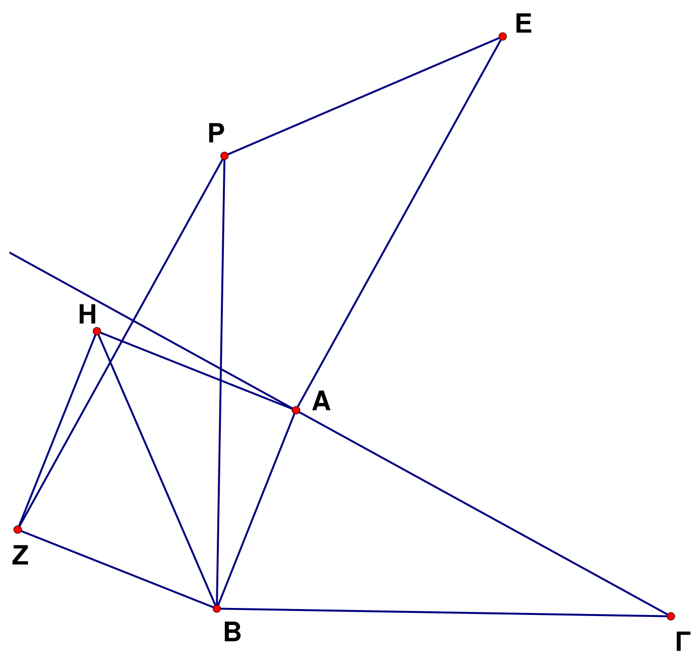
$A = |2x_1 - 4\cdot 2014| - |x_2| - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 1}$.

Θέμα Β

Δίνεται το οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος και εξωτερικά του κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΖΗ.

Θεωρούμε επίσης:

- ΒΡ κάθετη στην ΒΓ, με ΒΡ = ΒΓ ώστε τα Α , Ρ **να** βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΒΓ.
- ΑΕ κάθετη στην ΑΓ, με ΑΕ = ΑΓ ώστε τα Β, Ε να **μη** βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΑΓ.



Να δείξετε ότι:

Β1) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΡΒ είναι ίσα.

Β2) ΕΡ κάθετη στη ΒΗ.

Β3) ΕΡ = ΒΗ.

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Α΄**

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

Θέμα Α

Α1. $\Delta = 4\cdot 2014^2 - 4(-\kappa^2 - 1) = 4\cdot 2014^2 + 4\kappa^2 + 4 > 0$ για κάθε $\kappa \in R$.

Α2. Αρκεί $|x_1 - 2013| < |2013 - x_2|$

$\Leftrightarrow |x_1 - 2013|^2 < |2013 - x_2|^2 \Leftrightarrow (x_1 - 2013)^2 < (x_2 - 2013)^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2\cdot 2013\cdot x_1 + 2013^2 < x_2^2 - 2\cdot 2013\cdot x_2 + 2013^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 2\cdot 2013(x_1 - x_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - 2\cdot 2013(x_1 - x_2) < 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[x_1 + x_2 - 2\cdot 2013] < 0$ ισχύει γιατί:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$ και από τύπους Vieta:

$S = x_1 + x_2 = 2\cdot 2014 > 2\cdot 2013$ άρα $[x_1 + x_2 - 2\cdot 2013] > 0$

Α3. Από τύπους Vieta: $P = x_1\cdot x_2 = -\kappa^2 - 1 < 0$, άρα x_1, x_2 ετερόσημες με $x_1 < 0$ και $|2x_1 - 4\cdot 2014| = 4\cdot 2014 - 2x_1$,

$x_2 > 0$ άρα $|x_2| = x_2$

Επίσης $\sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 1} = \sqrt{(x_2 - 1)^2} = |x_2 - 1|$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου

x	$-\infty$ $\quad x_1 \quad x_1 \quad +\infty$
$x^2 - 2\cdot 2014\cdot x - \kappa^2 - 1$	+ 0 - 0 +

και η τιμή του τριωνύμου για x = 1 είναι $1 - 2\cdot 2014 - \kappa^2 - 1 < 0$ άρα $x_1 < 1 < x_2$ οπότε: $x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x_2 - 1| = x_2 - 1$.

Επομένως η αριθμητική τιμή της παράστασης Α είναι:

Α$= |2x_1 - 4\cdot 2014| - |x_2| - \sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 1} = 4\cdot 2014 - 2\cdot x_1 - x_2 - x_2 + 1 =$

$= 4\cdot 2014 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 4\cdot 2014 - 4\cdot 2014 + 1 = 1$

<u>Θέμα Β</u>

Β₁) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΡΒ είναι ίσα (ΠΓΠ) γιατί

ΒΓ = ΒΡ, ΑΒ = ΒΖ (υπόθεση) και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{P}$ (συμπληρωματικές της $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{P}$)

Β₂) Από τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΡΒ προκύπτει ότι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{Z}$. **(1)**

Επίσης $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = \mathrm{P}\hat{\mathrm{K}}\Lambda$ **(2)** (κατακορυφήν).

Άρα: από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** και άθροισμα γωνιών στα τρίγωνα ΒΚΓ και

ΡΛΚ έχουμε ότι $\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{P}\hat{\Lambda}\mathrm{K} = 90^0$ γιατί από υπόθεση $\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 90^0$.

Επομένως: ΡΖ = ΑΓ = ΑΕ και ΡΖ // ΑΕ (κάθετες στην ίδια ευθεία ΛΓ) οπότε το τετράπλευρο ΑΕΡΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Άρα ΕΡ // ΑΖ και επειδή ΑΖ κάθετη στην ΒΗ (διαγώνιες τετραγώνου) θα είναι και ΕΡ κάθετη στην ΒΗ.

Β₃) ΕΡ = ΒΗ γιατί ΕΡ = ΑΖ και ΑΖ = ΒΗ.