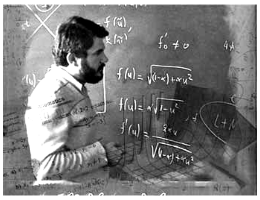
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας



Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

Θέμα Α

Έστω οι συναρτήσεις $f:[1,2]\to R$, $g:[1,2]\to R$ συνεχείς στο $[1,2]$, παραγωγίσιμες στο $(1,2)$ με $f([1,2]) = g([1,2]) = [1,2]$ και ο μιγαδικός αριθμός Z, τέτοιος ώστε: $\left|\dfrac{\bar{z}}{12+9i}+\dfrac{i}{3}\right|=\dfrac{1}{30}$.

A1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των $f\circ g$ και $g\circ f$.

A2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,2]$ ώστε: $f(g(x_0))+g(f(x_0))=2x_0$.

A3. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ ώστε: $f(\xi)+g(\xi)=\dfrac{|z|}{\xi^3}$.

A4. Αν $f(1)=f(2)=g(1)=g(2)=\dfrac{|z|}{3}$ να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που είναι εφαπτόμενες και της γραφικής παράστασης της g .

Θέμα Β

- Δίνεται συνάρτηση $g:R\to R$,συνεχής, με σύνολο τιμών $g(R)=(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $g(x+g(\psi))>g(x-g(\psi))$ για κάθε χ,ψ $\in R$.
- Δίνονται επίσης οι συναρτήσεις:

➢ $G:R\to R$, παραγωγίσιμη με $G(0)=0$ και $G'(x)=g(x)$ για κάθε χ $\in R$.

➢ $f:R\to R$ με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{G(2x)-G(x)}{x} & \gamma\iota\alpha \quad x\neq 0\\ g(0) & \gamma\iota\alpha \quad x=0\end{cases}$

B1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Υπολογίστε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

B3. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

B4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B5. Αν η ευθεία **ε** με εξίσωση ψ = 2χ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u> : Τάξη: Γ΄

Δράμα 30 Μαρτίου 2014

<u>Θέμα 1ο</u>

A_1. Για το $D_{f\circ g}$ πρέπει $x \in [1,2]$ και $g(x) \in [1,2]$ που ισχύει για κάθε χ$\in[1,2]$.
Άρα $D_{f\circ g}$ = $[1,2]$. Ομοίως $D_{g\circ f}$ = $[1,2]$.

A_2. Έστω η συνάρτηση K(x) = $(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)$-2χ στο $[1,2]$.

- K συνεχής στο $[1,2]$ως άθροισμα σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.
- K(1) = $f(g(1))+g(f(1))-2\geq 0$
  K(2) = $f(g(2))+g(f(2))-4\leq 0$

Αν K(1) = 0 ή K(2) = 0 το 1 ή το 2 θα είναι ρίζες.
Αν K(1) $\neq$ 0 και K(2) $\neq$ 0 τότε
από θεώρημα Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

A_3. Έστω η συνάρτηση λ(χ) = $f(x)+g(x)-\dfrac{|z|}{x^3}$ στο $[1,2]$.

- λ συνεχής στο $[1,2]$ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύει $\left|\dfrac{\bar{z}}{12+9i}+\dfrac{i}{3}\right|=\dfrac{1}{30}\Leftrightarrow\left|\dfrac{z}{3(4-3i)}-\dfrac{i}{3}\right|=\dfrac{1}{30}\Leftrightarrow\left|\dfrac{z-i(4-3i)}{4-3i}\right|=\dfrac{1}{10}$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{z-(3+4i)}{\sqrt{25}}\right|=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\left|\dfrac{z-(3+4i)}{5}\right|=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow|z-(3+4i)|=\dfrac{1}{2}$.

Επίσης $\Leftrightarrow\big||z|-|3+4i|\big|\leq|z-(3+4i)|$ ή $-\dfrac{1}{2}\leq|z|-5\leq\dfrac{1}{2}$ και $4{,}5\leq|z|\leq 5{,}5$

- λ(1) = $f(1)+g(1)-|z|$ και λ(2) = $f(2)+g(2)-\dfrac{|z|}{8}$

$$2\leq f(1)+g(1)\leq 4$$
$$-5{,}5\leq -|z|\leq -4{,}5$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$-3{,}5\leq\lambda(1)\leq -1{,}5$$

$$2\leq f(2)+g(2)\leq 4$$
$$\frac{-5{,}5}{8}\leq\frac{-|z|}{8}\leq\frac{-4{,}5}{8}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\frac{16-5{,}5}{8}\leq\lambda(2)\leq\frac{32-4{,}5}{8}$$

Άρα $\lambda(1)\cdot\lambda(2)<0$ και από θεώρημα Bolzano προκύπτει το ζητούμενο.

A_4. $\dfrac{4{,}5}{3}\leq\dfrac{|z|}{3}\leq\dfrac{5{,}5}{3}$ άρα $1<\dfrac{4{,}5}{3}\leq\dfrac{|z|}{3}\leq\dfrac{5{,}5}{3}<2$

Άρα τα $f(1), f(2), g(1), g(2)$ δεν είναι ίσα με το 1 (ελάχιστο των f, g) ούτε με το 2 (μέγιστο των f, g).

Επομένως οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[1,2]$ θα παίρνουν την ελάχιστη τιμή 1 στο χ_1 και χ_3 με χ_1, $\chi_3 \in (1,2)$, άρα από θεώρημα Fermat.
$f'(x_1)=0$ και $g'(x_3)=0$. Επίσης $f(x_1)=1$ και $g(x_3)=1$. Ομοίως
Θα υπάρχουν χ_2 και χ_4 με χ_2, $\chi_4 \in (1,2)$ με
$f'(x_2)=0$, $g'(x_4)=0$. και $f(x_2)=2$ και $g(x_4)=2$.
Άρα εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο (χ_1,1) είναι ψ-1=0(χ-χ_1) ή ψ = 1.
Επίσης εξίσωση εφαπτομένης της της C_g στο (χ_3,1) είναι η ψ = 1.
Ομοίως η ψ = 2 είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στα σημεία (χ_2,1) και (χ_4,1) αντίστοιχα.

<u>Θέμα 2ο</u>

Β1. Έστω $x_1 < x_2 \in R$. $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ το οποίο ανήκει στο $g(R)=(0,+\infty)$. Άρα θα υπάρχει $\psi_0 \in R$: $g(\psi_0)=\frac{x_2-x_1}{2}$. Άρα για ψ = ψ_0 έχουμε:

$$g(x+g(\psi_0)) > g(x-g(\psi_0)) \Rightarrow g\left(x+\frac{x_2-x_1}{2}\right) > g\left(x-\frac{x_2-x_1}{2}\right) \overset{x=\frac{x_1+x_2}{2}}{\Longrightarrow}$$

$g(x_2) > g(x_1)$. Άρα g είναι γνησίως αύξουσα.

Β2. g συνεχής , g ↑, $g(R)=(0,+\infty)$. Άρα $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Β3.

- Για $x \neq 0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- Στο 0 έχουμε: $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{G(2x)-G(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}DLH}{=} \lim_{x\to0}[G'(2x)-G'(x)]$

$$=\lim_{x\to0}[2g(2x)-g(x)] \overset{g\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} 2g(0)-g(0)=g(0)=f(0)$$

Β4. Για $x \neq 0$ f είναι παραγωγίσιμη.
$x\cdot f(x)=G(2x)-G(x) \Rightarrow x\cdot f'(x)+f(x)=2\cdot G'(2x)-G'(x) \Rightarrow$
$x\cdot f'(x)=2\cdot g(2x)-g(x)-f(x)$. **(1)**

- Για $x>0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την G στο $[x,2x]$. Άρα θα υπάρχει $\xi_1 \in (x,2x)$:

$$G'(\xi_1)=\frac{G(2x)-G(x)}{x} \Rightarrow g(\xi_1)=\frac{G(2x)-G(x)}{x}=f(x)$$

Η **(1)** γίνεται με χ>0: $x\cdot f'(x)=g(2x)-g(x)+g(2x)-g(\xi_1) \overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} f'(x)>0$

- Ομοίως για χ<0 : Θ.Μ.Τ για την G $[2x,x]$ θα υπάρχει $\xi_2 \in (2x,x)$:

$G'(\xi_2)=\dfrac{G(2x)-G(x)}{x} \Rightarrow g(\xi_2)=f(x)$. Άρα η **(1)** γίνεται με χ<0.

$$x\cdot f'(x)=g(2x)-g(x)+g(2x)-g(\xi_2)\overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} f'(x)>0.$$

Άρα $f\uparrow(-\infty,0)$, $f\uparrow(0,+\infty)$, συνεχής στο 0, άρα $f\uparrow R$.

B$_5$. Η ευθεία **ε** με εξίσωση ψ = 2χ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{G(2x)-G(x)}{x^2}$$

Για χ κοντά στο $+\infty$ $g(x)<g(\xi_1)<g(2x)$

$\Rightarrow g(x)<\dfrac{G(2x)-G(x)}{x}<g(2x) \Rightarrow g(x)<f(x)<g(2x)$ Αλλά

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(2x)=+\infty$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής(Απόδειξη) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επομένως το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{G(2x)-G(x)}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2G'(2x)-G'(x)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(2x)-g(x)}{2x}.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2x)}{2x}\overset{u=2x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{g(u)}{u}=2$.

Τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με $2\cdot2-\dfrac{1}{2}\cdot2=3$