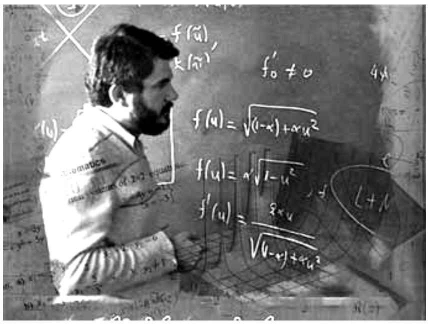
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Β΄

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

<u>Θέμα 1ο</u>

Δίνεται το σύστημα

$$(\Sigma):\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot x+\psi=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\phi\\[2ex] -\eta\mu\left(\phi+\dfrac{7\pi}{4}\right)\cdot x+\psi=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\phi,\quad \phi\in R\end{cases}$$

<u>Α.</u> Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν γωνίες φ ώστε το σύστημα (Σ) να έχει μοναδική λύση.

<u>Β.</u> Να βρείτε τις γωνίες φ ώστε το σύστημα (Σ) να έχει άπειρες λύσεις.

<u>Γ.</u> Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot x^4+\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}+\Gamma)\cdot x^2+\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma}{2},$$

όπου Α,Β,Γ είναι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}}\neq 90^0$). Αν το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις και (x_0, ψ_0) είναι μία από αυτές, να δείξετε ότι το ψ_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

<u>Θέμα 2ο</u>

Δίνεται η εξίσωση

$$C_\lambda: x^2+\psi^2-\rho^2+\lambda\cdot\left(x\cdot\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\psi\cdot\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\rho^2\right)=0$$, όπου λ παράμετρος με λ > -2 και ρ > 0 σταθερός αριθμός.

i) να δείξετε ότι η C_λ παριστάνει οικογένεια κύκλων για κάθε τιμή του λ.

ii) να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ.

iii) να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ διέρχονται από σταθερό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη (ε).

iv) αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες χ΄χ, ψ΄ψ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΒΓ (Ο αρχή των αξόνων) ανήκει στην οικογένεια C_λ.

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Β΄**

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

Θέμα 1ο

Α)

$$D=\begin{vmatrix}\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right) & 1\\ -\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right) & 1\end{vmatrix}=\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\phi-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)$$

$=\eta\mu\left(-\phi+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)$. Όμως $\left(-\phi+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)=2\pi$. Επομένως $\eta\mu\left(-\phi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)$. Άρα D = 0 και το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.

Β)

$$-\eta\mu\left(\phi+\frac{7\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(-\phi-\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\phi+\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{9\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)$$

Το (Σ) γίνεται $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot x+\psi=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\phi\\ \sigma\upsilon\nu\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot x+\psi=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\phi,\quad \phi\in R\end{cases}$

Για να έχει το (Σ) άπειρες λύσεις θα πρέπει:

$\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\phi=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\phi\Leftrightarrow\varepsilon\phi\phi=1$, άρα $\phi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad \kappa\in Z$.

Γ)

Το (Σ) άπειρες λύσεις, άρα $\phi=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\quad \kappa\in Z$ και (Σ) γίνεται:

$\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x+\psi=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\psi=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \acute{\eta}\quad \psi=\sqrt{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2}$ άρα $\psi=\pm1$.

Οπότε η λύση (x_0, ψ_0) = $(x_0, 1)$ ή $(x_0, -1)$.

Θα δείξουμε ότι ψ = 1 ή ψ = -1 είναι λύσεις του P(x).

$$P(1)=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu(\pi-A)+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$$

$=\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu A=0=P(-1)$ που ισχύει.

<u>*Θέμα 2ο*</u>

i) Η εξίσωση $C_\lambda : x^2+\psi^2-\rho^2+\lambda\cdot\left(x\cdot\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\psi\cdot\rho\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\rho^2\right)=0$ γίνεται:

$$x^2+2\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\cdot x+\frac{\lambda^2\rho^2 2}{16}+\psi^2-2\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\cdot\psi+\frac{\lambda^2\rho^2 2}{16}=\rho^2+\lambda\rho^2+2\frac{\lambda^2\rho^2 2}{16}\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\psi-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{\rho^2}{4}\left(4+4\lambda+\lambda^2\right)\Leftrightarrow$$

$\left(x+\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\psi-\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left(\frac{\rho}{2}(\lambda+2)\right)^2$ > 0 γιατί ρ $\neq 0$, λ$\neq -2$. Άρα η εξίσωση ***Cλ*** παριστάνει οικογένεια κύκλων με κέντρα $K\left(\frac{-\lambda\rho\sqrt{2}}{4},\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)$

και ακτίνα $R=\frac{\rho(\lambda+2)}{2}$ αφού ρ > 0 και λ > -2.

ii) Τα κέντρα $K\left(\frac{-\lambda\rho\sqrt{2}}{4},\frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4}\right)$ ανήκουν στην ευθεία ψ = - χ και επειδή

ρ > 0 η λ > -2 γίνεται $\frac{\rho\lambda\sqrt{2}}{4}>-2\frac{\rho\sqrt{2}}{4}$ ή $-\frac{\rho\lambda\sqrt{2}}{4}<\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$

δηλαδή χ < $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$. Άρα ο γ.τ των κέντρων είναι η ημιευθεία Αχ με $A\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2},\frac{-\rho\sqrt{2}}{2}\right)$, χωρίς το Α στην οποία ανήκει το Ο(0,0).

iii) Για λ = 0, C_0 : $x^2+\psi^2=\rho^2$ (1)

Για λ = -1 , C_{-1}: $C_\lambda : x^2+\psi^2-\cancel{\rho}^2-x\cdot\rho\frac{\sqrt{2}}{2}+\psi\cdot\rho\frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{\rho}^2=0$ (2)

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) παίρνουμε $\rho^2-x\cdot\rho\frac{\sqrt{2}}{2}+\psi\cdot\rho\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

$\Leftrightarrow x=\psi+\sqrt{2}\cdot\rho$ (3). Από τις (1) και (3)

$\left(\psi+\sqrt{2}\cdot\rho\right)^2+\psi^2=\rho^2\Leftrightarrow 2\psi^2+2\sqrt{2}\cdot\rho\cdot\psi+\rho^2=0$.

Η τελευταία εξίσωση με Δ=0 δίνει διπλή ρίζα $\psi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho$ και η (3)

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho$

Επομένως κοινό σημείο είναι το $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \rho}{2}, \frac{-\sqrt{2} \cdot \rho}{2}\right)$ το οποίο επαληθεύει

την C_λ

Άρα ανήκει σε όλους τους κύκλους της οικογένειας.

Η εφαπτομένη του C_0 στο Α είναι η ευθεία $x \cdot \frac{\rho\sqrt{2}}{2} - \psi \frac{\rho\sqrt{2}}{2} - \rho^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - \psi - \sqrt{2} \cdot \rho = 0$ (ε).

Επίσης d(Κ,ε) = $\frac{\left|\frac{-\lambda\rho\sqrt{2}}{4} - \frac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} \cdot \rho\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\lambda\rho\sqrt{2} + \lambda\rho\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot \rho\right|}{4\sqrt{2}} =$

$\frac{\left|2\lambda\rho\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot \rho\right|}{4\sqrt{2}} = \frac{\left|2\lambda\rho + 4\rho\right| \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\rho(\lambda + 2)}{2}$ = R.

Άρα d(Κ,ε) = R, οπότε (ε) είναι εφαπτομένη όλων των κύκλων C_λ.

iv) $x - \psi - \sqrt{2} \cdot \rho = 0$ (ε) .

Η (ε) τέμνει τον άξονα χ΄χ για ψ = 0 στο σημείο $\mathrm{B}\left(\rho\sqrt{2}, 0\right)$.

Και τον άξονα ψ΄ψ για χ = 0 στο σημείο $\Gamma\left(0, -\rho\sqrt{2}\right)$

Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές (ΟΒ=ΟΓ) και ορθογώνιο.

Άρα ο εγγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται στην (ε), έχει κέντρο πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma$ που είναι η ευθεία ψ = - χ. Άρα το κέντρο του

είναι Θ(χ_0,-χ_0), με χ_0 > 0 και χ_0 < ρ$\sqrt{2}$.

Ισχύει $d(\Theta,\varepsilon) = x_0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|x_0 + x_0 - \sqrt{2}\cdot\rho\right|}{\sqrt{2}} = x_0$$

$$\Leftrightarrow \left|2x_0 - \sqrt{2}\cdot\rho\right| = \sqrt{2}\cdot x_0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x_0 - \sqrt{2}\cdot\rho\right)^2 = 2x_0^2$$

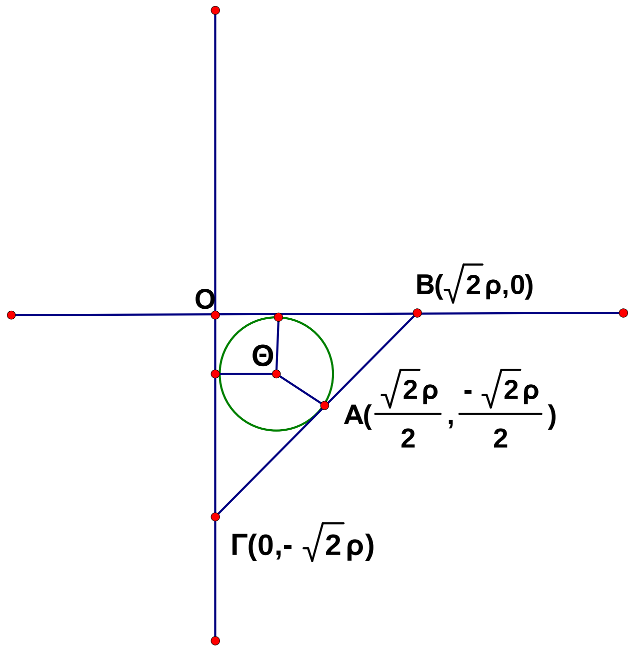
$$\Leftrightarrow 4x_0^2 - 4\sqrt{2}\cdot\rho\cdot x_0 + 2\rho^2 = 2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4\sqrt{2}\cdot\rho\cdot x_0 + 2\rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2\sqrt{2}\cdot\rho\cdot x_0 + \rho^2 = 0$$

$\Delta = 8\rho^2 - 4\rho^2 = 4\rho^2$. και

$$x_0 = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}\rho \pm \cancel{2}\rho}{\cancel{2}} = \rho\left(\sqrt{2}+1\right) \quad ή \quad \rho\left(\sqrt{2}-1\right)$$



Δεκτή η $x_0 = \rho\left(\sqrt{2}-1\right)$, ($x_0 < \rho\sqrt{2}$).

Εξετάζω αν υπάρχει τιμή του $\lambda > -2$ ώστε:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{-\lambda\rho\sqrt{2}}{4} \\ \\ \psi_0 = \dfrac{\lambda\rho\sqrt{2}}{4} \end{cases} \qquad x_0 = R = \frac{\rho(\lambda+2)}{2}$$

Είναι $\lambda = -2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Οπότε ο εγγεγραμμένος κύκλος (Θ, x_0) $\in C_\lambda$.