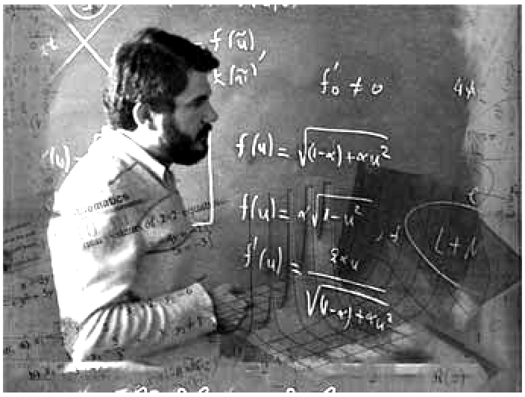
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Γ΄

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

Θέμα 1ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,+\infty)\to R$, με f(α) > 0 για την οποία ισχύει : $f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 f(x)=x$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$.

i) να αποδείξετε ότι α > 1.

ii) να βρείτε το σύνολο τιμών της f συναρτήσει του f(α).

iii) να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'(x)\sqrt{x}\right]=\dfrac{1}{2}$.

(Δίνεται ότι ημ2ω = 2ημωσυνω)

Θέμα 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με f(0) = 2012, η οποία έχει ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την ευθεία ψ = χ.

Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς $z(x)=x+if(x)$ με $x\in R$.

Α. να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $|z(x)|$.

Β. **Β1)** να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Β2) να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 < 0 < \xi_2$ ώστε $|z(\xi_1)|=|z(\xi_2)|=2013$

Β3) να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Μ να είναι κάθετη στην ΟΜ. (Ο αρχή των αξόνων).

Γ. αν υπάρχουν χ_1, χ_2, χ_3 πραγματικοί αριθμοί με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ ώστε ο μιγαδικός $\dfrac{z(x_1)-z(x_2)}{z(x_2)-z(x_3)}$ να είναι πραγματικός αριθμός, να δείξετε ότι η συνάρτηση f΄ δεν αντιστρέφεται.

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη Του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

<u>ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ</u> : Τάξη: Γ΄

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

<u>Θέμα 1ο</u>

i) $f^2(\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2 f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - 1 = f^2(\alpha) - \eta\mu^2 f(\alpha)$.

Ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$, άρα $\eta\mu^2 x - x^2 \le 0$.

Για $x = f(\alpha)$, $f^2(\alpha) - \eta\mu^2 f(\alpha) \ge 0$, άρα $\alpha - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \ge 1$.

Αλλά για $\alpha = 1$ προκύπτει $f(\alpha) = 0$ (άτοπο).

Άρα $\alpha > 1$.

ii) Με παραγώγιση της αρχικής σχέσης και επειδή ημ2ω =2ημωσυνω, έχουμε

$f'(x)\big(2f(x) - \eta\mu 2f(x)\big) = 1,\ \ x \ge \alpha$. Άρα

- $f'(x) \ne 0$ και $\big(2f(x) - \eta\mu 2f(x)\big) \ne 0$
- $f'(x) = \dfrac{1}{2f(x) - \eta\mu 2f(x)}$ και $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο A $= [\alpha, +\infty)$

  αφού ως παραγωγίσιμη (πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) είναι και συνεχής.

Για $x = \alpha$, $f'(\alpha)\big(2f(\alpha) - \eta\mu 2f(\alpha)\big) = 1$ και επειδή $f(\alpha) > 0$ έχουμε

$2f(\alpha) = |2f(\alpha)| > |\eta\mu 2f(\alpha)| \ge \eta\mu 2f(\alpha)$, άρα $2f(\alpha) - \eta\mu 2f(\alpha) > 0$

Δηλαδή $f'(\alpha) > 0$ Συνεπώς $f'(x) > 0$ στο $[\alpha, +\infty)$, άρα f↑ στο $[\alpha, +\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι f(A) = $[f(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

$f^2(x) + 1 - \eta\mu^2 f(x) = x \Leftrightarrow f^2(x) + 1 = x + \eta\mu^2 f(x) \ge x$

για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$. Άρα $f^2(x) \ge x - 1$.

Επίσης επειδή f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > \alpha$ είναι $f(x) > f(\alpha) > 0$.

Άρα $f(x) \ge \sqrt{x-1}$. **(1)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. <u>(Χρειάζεται απόδειξη).</u>

Οπότε f(A) = $[f(\alpha), +\infty)$.

iii) Ισχύει $0 \le \sigma\upsilon\nu^2 f(x) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x - f^2(x) \le 1$ Άρα.

$x - f^2(x) \ge 0 \Leftrightarrow f^2(x) \le x$. Και επειδή $f(x) > 0$ έχουμε $f(x) \le \sqrt{x}$

(2)

Από τις **(1), (2)** προκύπτει $\sqrt{x-1} \le f(x) \le \sqrt{x}$ **(3)** . Επίσης

$$f'(x)\cdot\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{2f(x)-\eta\mu 2f(x)}=\frac{1}{2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}-\frac{\eta\mu 2f(x)}{\sqrt{x}}}\quad \textbf{(4)}$$

Διαιρώ με $\sqrt{x}$ τη σχέση **(3)**: $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\le\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\le 1$ από την οποία με κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ =1

Επίσης $\left|\frac{\eta\mu 2f(x)}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{\eta\mu 2f(x)}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 2f(x)}{\sqrt{x}}=0$

Από τα παραπάνω η σχέση **(4)** δίνει ότι $\lim_{x\to+\infty}\left[f'(x)\sqrt{x}\right]=\frac{1}{2}$

Θέμα 2ο

Α) Έστω η συνάρτηση $g(x)=|z(x)|=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ ορισμένη στο Α $=(-\infty,+\infty)$

Επειδή η f έχει ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ την ευθεία ψ = χ, θα ισχύει:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ **και** $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

Στην αναζήτηση πλάγιας ασύμπτωτης ψ = λχ + β στο $+\infty$ για την g έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+f^2(x)}}{x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}}{x}=\sqrt{2}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[g(x)-\sqrt{2}\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+f^2(x)}-\sqrt{2}\cdot x]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x^2+f^2(x)}-\sqrt{2}\cdot x]\cdot[\sqrt{x^2+f^2(x)}+\sqrt{2}\cdot x]}{\sqrt{x^2+f^2(x)}+\sqrt{2}\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-x^2}{\sqrt{x^2+f^2(x)}+\sqrt{2}\cdot x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(f(x)+x)(f(x)-x)}{x\left(\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)}{x}\cdot\frac{f(x)-x}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}+\sqrt{2}}\right]=\ 2\cdot 0=0\,.$$

Άρα στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη είναι η $\psi=\sqrt{2}\cdot x$

Για την πλάγια ασύμπτωτη ψ = λχ + β στο $-\infty$ έχουμε

λ = $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+f^2(x)}}{x}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}}{x}=-\sqrt{2}$, και

β = $\lim_{x\to-\infty}[g(x)+\sqrt{2}\cdot x]=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+f^2(x)}+\sqrt{2}\cdot x]=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{x^2+f^2(x)}+\sqrt{2}\cdot x]\cdot[\sqrt{x^2+f^2(x)}-\sqrt{2}\cdot x]}{\sqrt{x^2+f^2(x)}-\sqrt{2}\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)-x^2}{\sqrt{x^2+f^2(x)}-\sqrt{2}\cdot x}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(f(x)+x)(f(x)-x)}{-x\left(\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)}{-x}\cdot\frac{f(x)-x}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}+1}\right]=\ (-2)\cdot 0=0$$

Άρα στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη είναι η $\psi=-\sqrt{2}\cdot x$

B) **B₁)** Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-x\big)=0$ Άρα $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και

$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=0$ Άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

B) **B₂)** Έστω η συνάρτηση $h(x)=|z(x)|-2013=\sqrt{x^2+f^2(x)}-2013$

ορισμένη στο $(-\infty,0]$. Ισχύει:

- h(0) = -1 < 0 και

- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$, άρα θα υπάρχει α κοντά στο $-\infty$ τέτοιο ώστε f(α) > 0.

Επομένως για την συνάρτηση **h** έχουμε.
Ορισμένη και συνεχής στο [α,0] και h(α)h(0) < 0.
Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 < 0$ με $\xi_1 \in (a,0) \subseteq (-\infty,0]$ έτσι ώστε $h(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow |z(\xi_1)| = 2013$
Ομοίως για την συνάρτηση **h** στο διάστημα $[0,+\infty)$, επειδή $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ θα υπάρχει β κοντά στο $+\infty$ τέτοιο ώστε f(β) > 0. Άρα θα υπάρχει τουλαχ.ένα
$\xi_2 > 0$ με $\xi_2 \in (0,\beta) \subseteq [0,+\infty)$ έτσι ώστε $h(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow |z(\xi_2)| = 2013$.
Άρα
υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 < 0 < \xi_2$ ώστε $|z(\xi_1)| = |z(\xi_2)| = 2013$.

Β₃) Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της, $\psi - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (ε), είναι κάθετη στην ΟΜ.
Η (ε) γίνεται $f'(x_0)x - \psi + f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$ και είναι παράλληλη με το $\vec{\delta} = (1, f'(x_0))$. Επίσης $\vec{\mathrm{OM}} = (x_0, f(x_0))$. Άρα αρκεί
$\vec{\delta}\cdot\vec{\mathrm{OM}} = 0 \Leftrightarrow x_0 + f'(x_0)\cdot f(x_0) = 0$. **(1)**

Έστω η συνάρτηση $g(x) = |z(x)| = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ ορισμένη στο $[\xi_1,\xi_2]$ με ξ_1,ξ_2 τέτοια ώστε $|z(\xi_1)| = |z(\xi_2)| = 2013$ ((i) ερώτημα).
Για την g ισχύει:

- g συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$.
- g παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και $g'(x) = \dfrac{2x + 2f(x)\cdot f'(x)}{2\sqrt{x^2 + f^2(x)}} = \dfrac{x + f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{x^2 + f^2(x)}}$
- $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 2013$.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1,\xi_2)$ έτσι ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + f'(x_0)\cdot f(x_0) = 0$.

Οπότε σύμφωνα με τη σχέση **(1)** $\vec{\delta} \perp \vec{\mathrm{OM}}$.

Γ) $\frac{z(x_1)-z(x_2)}{z(x_2)-z(x_3)} \in R$, άρα $\frac{z(x_1)-z(x_2)}{z(x_2)-z(x_3)} = \lambda, \quad \lambda \in R$. και

$$z(x_1)-z(x_2)=\lambda\cdot\left(z(x_2)-z(x_3))\right)\Leftrightarrow$$

$\left(x_1-x_2\right)+i\cdot(f(x_1)-f(x_2)=\lambda\cdot(x_2-x_3)+\lambda\cdot\left((f(x_2)-f(x_3)\right)$. Άρα

$x_1-x_2=\lambda\cdot(x_2-x_3)$ **(2)** και $f(x_1)-f(x_2)=\lambda\cdot(f(x_2)-f(x_3))$ **(3)**

Αλλά $x_2 \neq x_3$ επομένως η **(2)** γίνεται $\frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}=\lambda$ και με αντικατάσταση

στην **(3)** αφού $x_1 \neq x_2$ παίρνουμε : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(f(x_3)-f(x_2))}{x_3-x_2}$

(4)

Με εφαρμογή Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$
για την συνάρτηση f (παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής)
θα υπάρχουν $t_1 \in (x_1, x_2)$ και $t_2 \in (x_2, x_3)$ έτσι ώστε

$f'(t_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(t_2)=\frac{(f(x_3)-f(x_2))}{x_3-x_2}$

Αλλά $x_1 < t_1 < x_2 < t_2 < x_3$ και σύμφωνα με τη σχέση **(4)** έχουμε
$t_1 \neq t_2$ και $f'(t_1)=f'(t_2)$. Άρα η συνάρτηση f΄ δεν αντιστρέφεται.