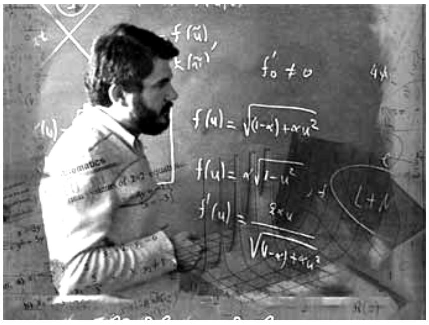
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

Θέμα 1ο

Α. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{3\lambda - \lambda^2}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ορίζεται.

Β. Επίσης δίνεται το τριώνυμο $\left(\sqrt{3\lambda - \lambda^2} - |\lambda|\right)x^2 + 2x + \left(\sqrt{3\lambda - \lambda^2} + |\lambda|\right) \quad \mu\varepsilon \quad \lambda \neq 0$.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε τιμή του χ.

Γ. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι αριθμοί $\left(\sqrt{3\lambda - \lambda^2} - |\lambda|\right), \ \sqrt{2}, \ \left(\sqrt{3\lambda - \lambda^2} + |\lambda|\right)$ είναι

διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Θέμα 2ο

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^0$ και ΒΓ = ΓΔ.

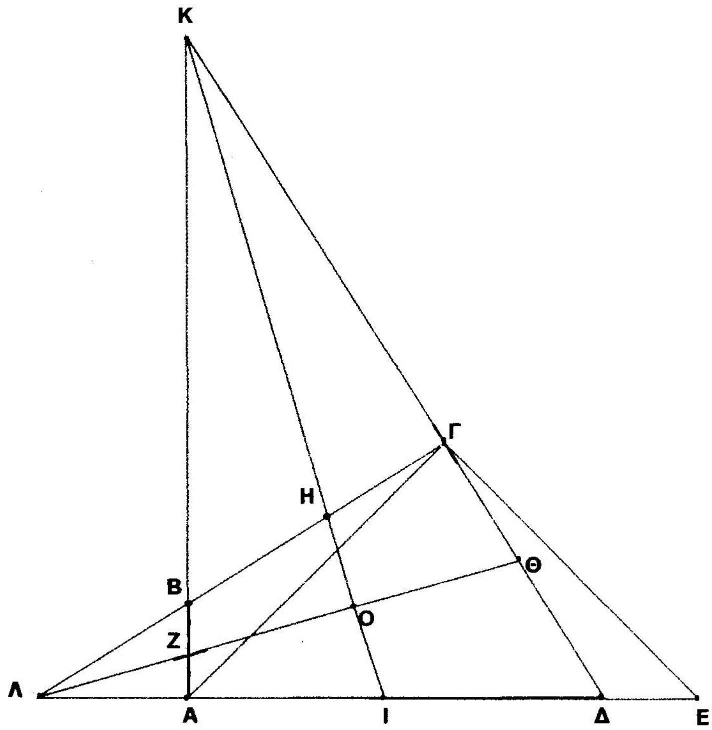
Στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ = ΑΒ.

α) να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.

β) να δείξετε ότι η ΑΓ είναι κάθετη στην ΓΕ και διχοτομεί την γωνία $\hat{A}$.

γ) Αν οι ΑΒ, ΔΓ τέμνονται στο Κ και οι ΓΒ,ΔΑ τέμνονται στο Λ να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\Gamma\hat{K}B$ και $A\hat{\Lambda}B$ τέμνονται κάθετα.

δ) Αν η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Lambda}B$ τέμνει τις ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ζ,Θ αντίστοιχα και η διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{K}B$ τέμνει τις ΒΓ, ΑΔ στα σημεία Η και Ι, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΘΙ είναι ρόμβος.



Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: Α΄

Δράμα 31 Μαρτίου 2013

Θέμα 1ο

Α. Για να ορίζεται η παράσταση Α, πρέπει $3\lambda - \lambda^2 \geq 0$, ρίζες 0, 3

λ	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-\lambda^2 + 3\lambda$		-	0	+	0	-	

Δηλαδή πρέπει $\lambda \in [0, 3]$.

Β. i) Πρέπει Δ < 0 και α > 0

Δ < 0 , δηλαδή

$$4-4\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|\right)\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}+|\lambda|\right)<0 \Leftrightarrow 4-4\left(3\lambda-\lambda^2-\lambda^2\right)<0 \Leftrightarrow 2\lambda^2-3\lambda+1<0$$

ρίζες $\frac{1}{2}$, 1

λ	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
Δ			+	0	-	0	+		

Άρα Δ < 0 $\Leftrightarrow \lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$. **(1)**

Όταν $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ το α > 0 γίνεται

$$\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|>0 \Leftrightarrow \sqrt{3\lambda-\lambda^2}>|\lambda| \Leftrightarrow 3\lambda-\lambda^2>\lambda^2 \Leftrightarrow -2\lambda^2+3\lambda>0$$

ρίζες 0, $\frac{3}{2}$

λ	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2\lambda^2 + 3\lambda$		-	0	+	0	-	

Άρα α > 0 $\Leftrightarrow$ $\lambda \in (0, \frac{3}{2})$. **(2)**

Από τις σχέσεις (1) και (2), Δ < 0 και α > 0 $\Leftrightarrow \lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$.

ii) $\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|\right)$, $\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}+|\lambda|\right)$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, όταν

$$2\sqrt{2}=\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|\right)+\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}+|\lambda|\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}=\sqrt{3\lambda-\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0$$

$\Leftrightarrow$ λ = 1 ή λ = 2 (Δεκτές)

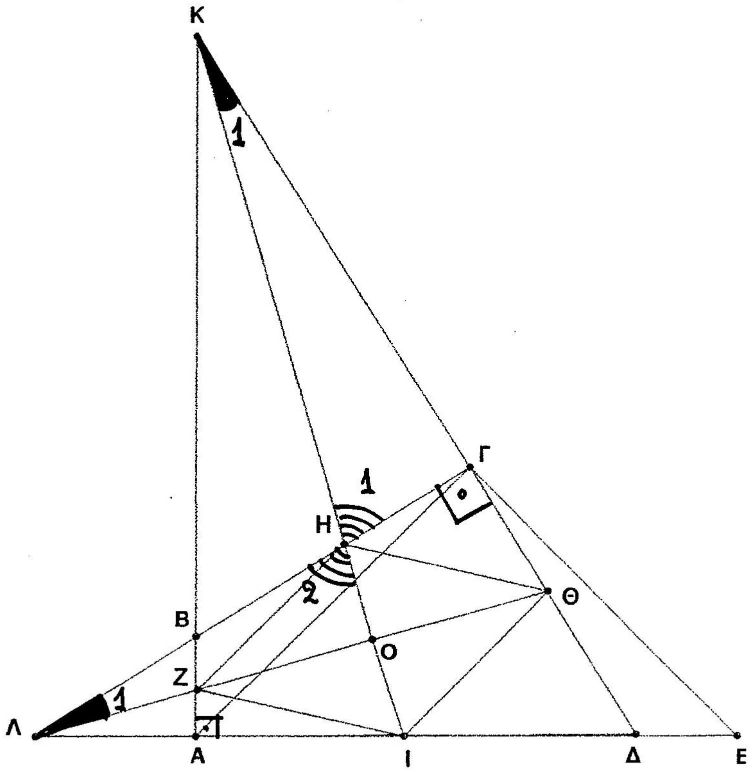
Θέμα 2ο

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα γιατί :

- ΑΒ = ΔΕ και ΒΓ = ΓΔ (Υπόθεση)
- $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta E}$

ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{KB\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta A}$.

$\widehat{KB\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta A}$ ως συμπληρωματικές της γωνίας $\widehat{AK\Delta}$.



β) Επειδή $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta E}$,έχουμε

- $\widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Delta\Gamma E}$ (1) και
- ΑΓ = ΓΕ. (2)

Λόγω της (1),

$\widehat{B\Gamma A} + \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Gamma E} + \widehat{A\Gamma\Delta} = 90^0$

$\Leftrightarrow \widehat{A\Gamma E} = 90^0$. Επομένως ΑΓ $\perp$ ΓΕ.

Άρα από τη σχέση (2) το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Οπότε γωνία $\widehat{\Gamma AE} = 45^0$. Και επειδή γωνία $\widehat{A} = 90^0$, θα είναι και $\widehat{\Gamma AB} = 45^0$.

Άρα ΑΓ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

γ) Αρκεί η γωνία $\widehat{KO\Lambda} = 90^0$ ή $\widehat{\Lambda}_1 + \widehat{H}_2 = 90^0$.

Αλλά $\widehat{H}_2 = \widehat{H}_1$ ως κατακορυφήν. Επίσης τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΛΓΔ είναι ίσα γιατί:

- είναι ορθογώνια
- ΒΓ = ΓΔ (υπόθεση) και
- $\widehat{KB\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta A}$

Επομένως $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} \Leftrightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{\Lambda}_1$ (ΚΗ, ΛΖ διχοτόμοι).

Άρα έχουμε: $\widehat{K}_1 + \widehat{H}_1 = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{H}_2 = 90^0 \Leftrightarrow \widehat{\Lambda}_1 + \widehat{H}_2 = 90^0$.

Δηλαδή $\widehat{KO\Lambda} = 90^0$ ή ΚΟ $\perp$ ΛΟ.

δ) Στα τρίγωνα ΛΗΙ και ΚΖΘ οι διχοτόμοι ΛΟ και ΚΟ είναι και ύψη (γ ερώτημα) άρα θα είναι και διάμεσοι.

Επομένως στο τετράπλευρο ΖΗΘΙ οι διαγώνιοι ΖΘ, ΗΙ

- διχοτομούνται (παραλληλόγραμμο)
- είναι κάθετες (άρα Ρόμβος).