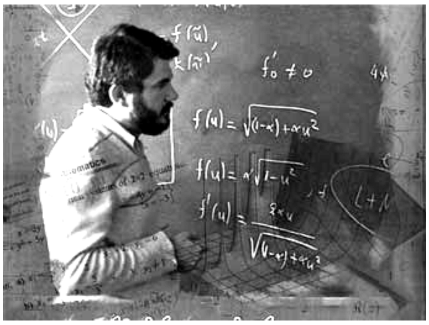
Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Β΄

Δράμα 1 Απριλίου 2012

<u>Θέμα 1ο</u>

<u>Α.</u> Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in R$, έχει ελάχιστη τιμή η οποία και να βρεθεί.

<u>Β.</u> Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x + ημx}$, $x \in R$

i) να δείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει: $f(2x) > f(-x^2-3)$

ii) να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\left(x \cdot f(3\pi) - 1\right)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - e^{-3\pi}x^2 - e^2x + e^{2-3\pi}$, $x \in R$.

<u>Θέμα 2ο</u>

Θεωρούμε τα σημεία Α(α,0) και Β(0,β) στους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οψ αντίστοιχα έτσι ώστε $\left|\overrightarrow{OA}\right| + 3\left|\overrightarrow{OB}\right| = 10$ και σημείο Γ της ΑΒ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{ΑΓ} = 9\overrightarrow{ΓΒ}$.

α. να δείξετε ότι οι κάθετες ευθείες επί της ΑΒ στο σημείο Γ περνούν από σταθερό σημείο Σ.

β. έστω Σ΄ συμμετρικό του Σ ως προς την ΑΒ. Να δείξετε ότι το σημείο Γ κινείται σε σταθερή ευθεία (η), και το σημείο Σ΄ κινείται σε σταθερή ευθεία (δ).

γ. αν $K(x_1,\psi_1)$ είναι σημείο της ευθείας (η) και $Λ(x_2,\psi_2)$ σημείο της ευθείας (δ) του ερωτήματος β), να δείξετε ότι

$$10(x_1 - x_2)^2 + 10(\psi_1 - \psi_2)^2 - 9 \geq 0 .$$

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Β΄**

Δράμα 1 Απριλίου 2011

Θέμα 1°

Α) Για $x \in R$, $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2$.

$(x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq g(-1)$

αφού $g(-1) = 2$.

Επομένως η g(x) παρουσιάζει για x = -1 ελάχιστη τιμή ίση με 2.

Β) **i)** Για κάθε $x \in R$,

$$f(2x) > f(-x^2 - 3) \Leftrightarrow e^{2x+\eta\mu 2x} > e^{-x^2-3+\eta\mu(-x^2-3)} \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow}$$

$$2x + \eta\mu 2x > -x^2 - 3 + \eta\mu(-x^2 - 3) \Leftrightarrow$$

$$2x + \eta\mu 2x > -x^2 - 3 - \eta\mu(x^2 + 3) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 3 > -\eta\mu 2x - \eta\mu(x^2 + 3). \quad \mathbf{(1)}$$

Αλλά από το Α, $x^2 + 2x + 3 \geq 2$

Επίσης για κάθε $x \in R$, $-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu(x^2 + 3) \leq 1$ άρα

$\eta\mu 2x + \eta\mu(x^2 + 3) \geq -2 \Leftrightarrow -\eta\mu 2x - \eta\mu(x^2 + 3) \leq 2$ για κάθε $x \in R$

Επομένως για να ισχύει η **(1)** για κάθε $x \in R$, θα πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = 2 \\ -\eta\mu 2x - \eta\mu(x^2 + 3) = 2 \end{cases}$$

να είναι αδύνατο.

Πράγματι $x^2 + 2x + 3 = 2$ όταν $x = -1$.

Για $x = -1$ το $-\eta\mu 2x - \eta\mu(x^2 + 3)$ γίνεται $\eta\mu 2 - \eta\mu 4 \neq 2$.

Επομένως $x^2 + 2x + 3 > -\eta\mu 2x - \eta\mu(x^2 + 3)$ άρα και

$f(2x) > f(-x^2 - 3)$ ισχύει για κάθε $x \in R$.

ii) Είναι $\mathrm{P}(x) = (x \cdot f(3\pi) - 1) \cdot \pi(x) + \upsilon,\ \ \upsilon\ \ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$, για κάθε $x \in R$.

Για $x = \dfrac{1}{f(3\pi)}$ είναι $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{f(3\pi)}\right) = \upsilon$.

$$\upsilon = \mathrm{P}\left(\frac{1}{f(3\pi)}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{e^{3\pi+\eta\mu 3\pi}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{e^{3\pi}}\right) = \mathrm{P}\left(e^{-3\pi}\right).$$

Αλλά $\mathrm{P}\left(e^{-3\pi}\right) = e^{-9\pi} - e^{-3\pi}e^{-6\pi} - e^2 e^{-3\pi} + e^{2-3\pi}$

$= e^{-9\pi} - e^{-9\pi} - e^{2-3\pi} + e^{2-3\pi} = 0$

Άρα $\mathrm{P}(x) = (x \cdot f(3\pi) - 1) \cdot \pi(x)$, οπότε $(x \cdot f(3\pi) - 1)$ παράγοντας του P(x).

Άλλη Λύση για το Β ii).

$$\mathrm{P}(x) = x^3 - e^{-3\pi} \cdot x^2 - e^2 \cdot x + e^{2-3\pi} = x^3 - e^{-3\pi} \cdot x^2 - e^2 \cdot x + e^2 \cdot e^{-3\pi}$$

$$= x^2(x - e^{-3\pi}) - e^2(x - e^{-3\pi}) = (x - e^{-3\pi})(x^2 - e^2) =$$

$$= (x - e^{-3\pi})(x^2 - e^2) = (x - \frac{1}{e^{3\pi}})(x^2 - e^2) = \frac{1}{e^{3\pi}}(x \cdot e^{3\pi} - 1) \cdot (x^2 - e^2)$$

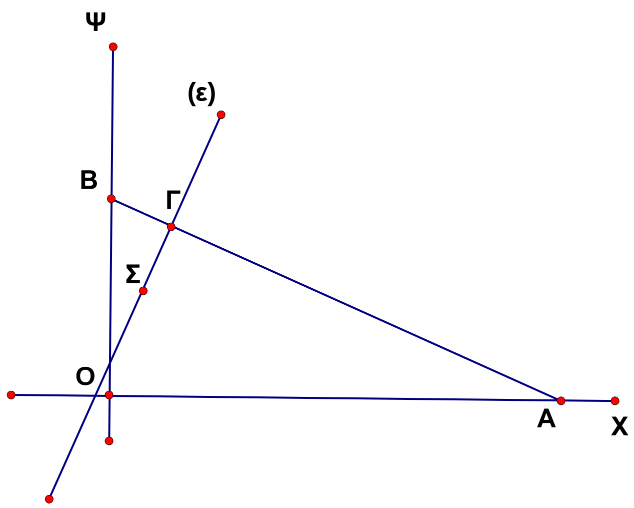
$$= \frac{1}{e^{3\pi}}(x \cdot f(3\pi) - 1) \cdot (x^2 - e^2)$$ γιατί $= f(3\pi) = e^{3\pi+\eta\mu 3\pi} = e^{3\pi}$

Άρα το $(x \cdot f(3\pi) - 1)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$\mathrm{P}(x) = x^3 - e^{-3\pi}x^2 - e^2 x + e^{2-3\pi}$, $x \in R$.

Θέμα 2ο

α) Είναι Α(α,0) και Β(0,β), άρα $\left|\vec{\mathrm{OA}}\right| = \alpha$ και $\left|\vec{\mathrm{OB}}\right| = \beta$, οπότε α >0, β >0 και α + 3β = 10 (1) (αφού $\left|\vec{\mathrm{OA}}\right| + 3\left|\vec{\mathrm{OB}}\right| = 10$). Αν Γ(κ,λ) τότε:



$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = (\kappa - \alpha, \lambda)$ και

$\vec{\mathrm{\Gamma B}} = (-\kappa, \beta - \lambda)$. Είναι

$\vec{\mathrm{A\Gamma}} = 9\vec{\mathrm{\Gamma B}} \Leftrightarrow$

$(\kappa - \alpha, \lambda) = 9(-\kappa, \beta - \lambda) \Leftrightarrow$

$(\kappa - \alpha, \lambda) = \left(-9\kappa,\ 9\beta - 9\lambda\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\kappa-\alpha=-9\kappa\\ \lambda=9\beta-9\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=\dfrac{\alpha}{10}\\ \lambda=\dfrac{9\beta}{10}\end{cases}.$$ Άρα $\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{10},\dfrac{9\beta}{10}\right)$.

Έχουμε $\lambda_{AB}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Αν $(\varepsilon)\perp AB$ στο σημείο της Γ, τότε $\lambda_{\varepsilon}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και

(ε) : $\psi-\dfrac{9\beta}{10}=\dfrac{\alpha}{\beta}\left(x-\dfrac{\alpha}{10}\right)\Leftrightarrow 10\alpha x-10\beta\psi+9\beta^2-\alpha^2=0$.

Η (ε) διέρχεται από το σταθερό σημείο $\Sigma(\chi_0,\psi_0)$ αν και μόνο αν

($10\alpha x_0-10\beta\psi_0+9\beta^2-\alpha^2=0$ για κάθε α,β $\in(0,+\infty)$ με α + 3β = 10)

$\Leftrightarrow$ ($10(10-3\beta)x_0-10\beta\psi_0+9\beta^2-(10-3\beta)^2=0$ για κάθε α,β $\in(0,+\infty)$, α=10–3β)

$\Leftrightarrow$ ($100x_0-30\beta x_0-10\beta\psi_0+9\beta^2-100-9\beta^2+60\beta=0$ για κάθε β>0, 10-3β>0)

$\Leftrightarrow$ ($10(6-3x_0-\psi_0)\beta+100(x_0-1)=0$ για κάθε $\beta\in\left(0,\dfrac{10}{3}\right)$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-1=0\\ 6-3\chi_0-\psi_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\ \psi_0=3\end{cases}.$$

Άρα οι κάθετες ευθείες (ε) της ΑΒ στο Γ περνούν από το σταθερό σημείο Σ(1,3).

β.

- Έστω Γ(χ,ψ). Τότε: $\begin{cases}x=\dfrac{\alpha}{10}\\ \psi=\dfrac{9\beta}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10x\\ \beta=\dfrac{10\psi}{9}\end{cases}$ Επίσης από την (1)

  έχουμε

  $10x+3\cdot\dfrac{10\psi}{9}=10\Leftrightarrow\quad 3x+\psi-3=0$.

  Άρα το Γ κινείται στην σταθερή ευθεία (η): $3x+\psi-3=0$.
- Το Σ είναι σημείο της (ε) και (ε)$\perp$ΑΒ στο Γ. Άρα ΣΓ$\perp$ΑΒ συνεπώς το Γ είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΣΣ΄, λόγω συμμετρίας.

Έστω Σ΄(χ,ψ): τότε: $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{\alpha}{10}\\ \dfrac{\psi+3}{2}=\dfrac{9\beta}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=5\chi+5\\ \beta=\dfrac{5\psi+15}{9}\end{cases}.$

Η (1) δίνει $5x+5+3\frac{5\psi+15}{9}=10 \Leftrightarrow \quad x+1+\frac{\psi+3}{3}=2 \Leftrightarrow \; 3x+\psi=0$

Άρα το Σ΄ κινείται στην σταθερή ευθεία (δ): $3x+\psi=0$.

γ. Είναι (η) // (δ) αφού $\lambda_\eta = \lambda_\delta = -3$. Το σημείο Ο(0,0) είναι σημείο της ευθείας(δ). Ισχύει $d(\eta,\delta)=d(O,\eta)=\frac{|3\cdot 0+0-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Για οποιαδήποτε θέση των Κ, Λ στις ευθείες (η) και (δ) αντίστοιχα, ισχύει:

$$d(\eta,\delta) \le (\mathrm{K}\Lambda) \Leftrightarrow \sqrt{(\chi_1-\chi_2)^2+(\psi_1-\psi_2)^2} \ge \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$$

$$(\chi_1-\chi_2)^2+(\psi_1-\psi_2)^2 \ge \frac{9}{10} \Leftrightarrow \quad 10(x_1-x_2)^2+10(\psi_1-\psi_2)^2-9\ge 0$$